

Ergänzungen zum Kapitel

Optik und Atomphysik

Wellenoptik (Kap. 22.1 bis 22.8)

Polarisation des Lichtes (Kap. 23.1 bis 23.5)

(,Kompaktkurs Physik', H. Pfeifer, H. Schmiedel und R. Stannarius)

Prof. Dr. Dr. h.c. Harry Pfeifer
Prof. Dr. Herbert Schmiedel
Prof. Dr. Ralf Stannarius



Kompaktkurs Physik

mit virtuellen Experimenten und Übungsaufgaben

August 2004

B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH,
Wiesbaden

22 Wellenoptik

Max von Laue: Wirklichkeit ist etwas, das Wirkungen ausübt.

22.1 Kohärenz

Nach der Quantenphysik wird eine elektromagnetische Welle dann abgestrahlt, wenn ein System, z.B. ein Atom, aus einem **angeregten Zustand** (excited state) in einen energetisch tiefer liegenden Zustand, z.B. den **Grundzustand** (ground state), d.h. den tiefsten, stabilen Energiezustand, übergeht. Die Frequenz f der Welle folgt aus der Beziehung $f = \Delta E/h$, wobei h die Planck-Konstante (s.A.1, S.1245) und ΔE den Energieunterschied zwischen den beiden Zuständen bezeichnet. Die Dauer τ des Emissionsvorgangs nennt man auch **mittlere Lebensdauer** (mean life time) des angeregten Zustandes. Mit den Methoden der Quantenphysik ist es möglich, sowohl die Energiedifferenz ΔE als auch die zugehörige Lebensdauer τ zu berechnen. Wir nehmen diese Größen hier als gegeben an. Aus τ ergibt sich mit der Lichtgeschwindigkeit c für die Länge λ_c des Wellenzuges (**Kohärenzlänge**, coherence length)

$$\ell_c = c\tau \quad (478)$$

und für die Halbwertsbreite der zugehörigen Spektrallinie

$$\Delta f \approx \frac{1}{\tau}. \quad (479)$$

A 123

Zum Beweis dieser letzteren Gleichung verwenden wir das **Fourier-Theorem** (Fourier theorem, Joseph Fourier 1768-1830), wonach sich *jede beliebige Zeitfunktion* $F(t)$ (abgesehen von "exotischen" Fällen) *durch eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen darstellen* lässt. Für $F(t)$ wählen wir die Komponente $E(t)$ der elektrischen Feldstärke der elektromagnetischen Welle senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung. Dann gilt (**Fourier-Transformation**, Fourier transformation)

$$E(t) = \int_0^\infty [\mathcal{E}_c(\omega) \cos \omega t + \mathcal{E}_s(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (480)$$

mit

$$\mathcal{E}_c(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \cos \omega t dt \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \sin \omega t dt. \quad (481)$$

Man beachte, dass $\mathcal{E}_c(\omega)$ und $\mathcal{E}_s(\omega)$ spektrale Dichten sind, die die Einheit Vs/m besitzen. Die Größe

$$\hat{\mathcal{E}}(\omega) = [\mathcal{E}_c^2(\omega) + \mathcal{E}_s^2(\omega)]^{1/2} \quad (482)$$

bezeichnet man als das **Amplitudenspektrum** der Zeitfunktion $E(t)$. Die Anwendung dieser Beziehungen auf den in Abb.168a dargestellten **Wellenzug** (wave train) liefert unter der Voraussetzung, dass der Wellenzug aus einer großen Anzahl von Perioden besteht ($\omega_0\tau \gg 1$), für das Amplitudenspektrum, das in Abb.168b dargestellt ist,

$$\hat{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{\hat{E}_0\tau}{2\pi} \left| \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\tau/2]}{[(\omega_0 - \omega)\tau/2]} \right|. \quad (483)$$

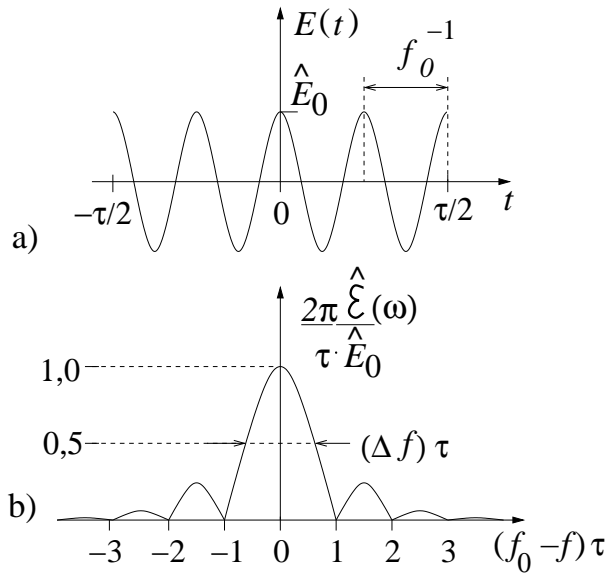


Abbildung 168. a) Wellenzug $E(t)$ der Dauer τ , der Amplitude \hat{E}_0 und der Frequenz f_0 . b) Amplitudenspektrum $\hat{\mathcal{E}}(\omega)$ des Wellenzuges $E(t)$. Δf ist die Halbwertsbreite der Spektrallinie

Einsetzen von $E(t) = \hat{E}_0 \cos \omega t$ für $-\tau/2 \leq t \leq +\tau/2$ und $E(t) = 0$ für $|t| > \tau/2$ in die beiden Gln.(481) liefert $\mathcal{E}_c = \pi^{-1} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \hat{E}_0 \cos \omega_0 t \cos \omega t dt$ und, wegen der Symmetrie, $\mathcal{E}_s = 0$. Das Integral formen wir mit Hilfe des Additionstheorems $\cos \alpha \cos \beta = (1/2) \cos(\alpha + \beta) + (1/2) \cos(\alpha - \beta)$ zu dem Ausdruck $\mathcal{E}_c = \hat{E}_0 (2\pi)^{-1} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} [\cos(\omega_0 + \omega)t + \cos(\omega_0 - \omega)t] dt$ um. Unter der Voraussetzung $\omega_0\tau \gg 1$ folgt $\mathcal{E}_c = (\hat{E}_0/\pi) \{ \sin[(\omega_0 - \omega)\tau/2] \} / (\omega_0 - \omega)$, womit sich nach Einsetzen in die Gl.(482) und mit $\mathcal{E}_s = 0$ die gesuchte Gl.(483) ergibt.

Das Hauptmaximum des Amplitudenspektrums $\mathcal{E}(\omega)$ in Abb.168b) wird umso größer, je länger die mittlere Lebensdauer τ des angeregten Zustands ist. Gleichzeitig wird die Frequenzdifferenz $|f_0 - f|$ zu den Nebenmaxima immer geringer. Nebenmaxima treten gar nicht mehr auf, wenn die Amplitude \hat{E}_0 des Wellenzuges nicht konstant ist, sondern exponentiell abnimmt. Die **Halbwertsbreite** (full width at half maximum, abgekürzt mit FWHM) Δf der Spektrallinie ergibt sich aus der Bedingung $\{\sin[\pi(\tau/2)\Delta f]\}/[\pi(\tau/2)\Delta f] = 1/2$ (s.Gl.(483)) zu $\Delta f \approx 1,21/\tau$, womit die Gl.(479) bewiesen ist. Für isolierte Atome und Übergänge im sichtbaren Licht ist τ von der Größenordnung 10 ns. Dieser Wert verkürzt sich aber mit zunehmender Dichte des Gases und mit wachsender Temperatur durch die Stöße zwischen den Atomen. Die entsprechende Vergrößerung der Linienbreite nach Gl.(479), S.331, heißt **Stoßverbreiterung** (impact broadening oder collisional broadening). Wenn die auftretenden Energieunterschiede ΔE (s.S.331) nicht alle gleich, sondern über einen gewissen Bereich verteilt sind, ergibt sich die beobachtete Spektrallinie als Überlagerung von Spektrallinien mit verschiedenen Resonanzfrequenzen. Die dadurch bedingte Vergrößerung der Linienbreite nennt man **inhomogene Linienverbreiterung** (inhomogeneous line broadening). In Gasen führt der Doppler-Effekt zu einer inhomogenen Verbreiterung der Spektrallinien.

Bei den als **Laser** (light amplification by stimulated emission of radiation) bezeichneten Lichtquellen werden Atome, Ionen oder Moleküle durch äußere Anregung, z.B. durch elektromagnetische Strahlung mit einer Frequenz, die größer sein muss, als die des gewünschten Laserlichts (f_L), in einen angeregten Zustand gebracht. In diesem Zustand soll das Teilchen die Energie E_a und eine möglichst lange Lebensdauer besitzen. Außerdem muss unterhalb von E_a ein Zustand mit der Energie $E_u = E_a - hf_L$ existieren, wobei h die Planck-Konstante bezeichnet. Der Laser funktioniert nur dann, wenn sich im oberen Energieniveau E_a mehr Atome befinden als im unteren (**Besetzungsinversion**, population inversion). Sobald dann eines der Teilchen spontan vom angeregten Zustand nach diesem unteren Zustand übergeht, sendet es Licht der Frequenz f_L aus, durch das weitere Teilchen infolge der induzierten Emission (s.S.419) veranlasst werden, den Übergang von E_a nach E_u zu vollziehen. Dabei senden sie, und das ist das Wesentliche, Licht mit der gleichen Frequenz (f_L) und *mit der gleichen Phase* aus. Indem man dieses Licht durch Reflexion an zwei gegenüber liegenden Spiegeln immer wieder das Lasermaterial durchlaufen lässt, kommt es zu einer lawinenartigen Verstärkung der Lichtintensität. Die Abstrahlung dieses Laserlichts realisiert man meist dadurch, dass einer der beiden Spiegel teildurchlässig ist.

In Abb.169 ist der Aufbau des weit verbreiteten Helium-Neon-Lasers schematisch dargestellt. In einer Gasentladungsröhre (Länge 0,3...1 m) befinden sich die Edelgase Helium und Neon (Mischungsverhältnis etwa 10:1) bei niedrigem Druck (0,3...1 kPa). Nach Zündung mit einem Hochspannungsimpuls (≈ 10 kV) brennt eine Glimmentladung in der Kapillare (Durchmesser ≈ 1 mm) bei einer Spannung von etwa 1 kV. Die Parameter der Gasentladung sind so gewählt, dass sich für die Neon-Atome

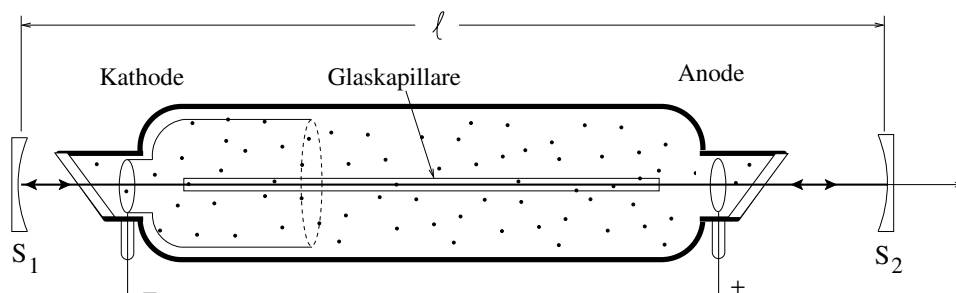


Abbildung 169. Prinzipskizze des Gaslasers. Der Spiegel S_2 ist teildurchlässig.

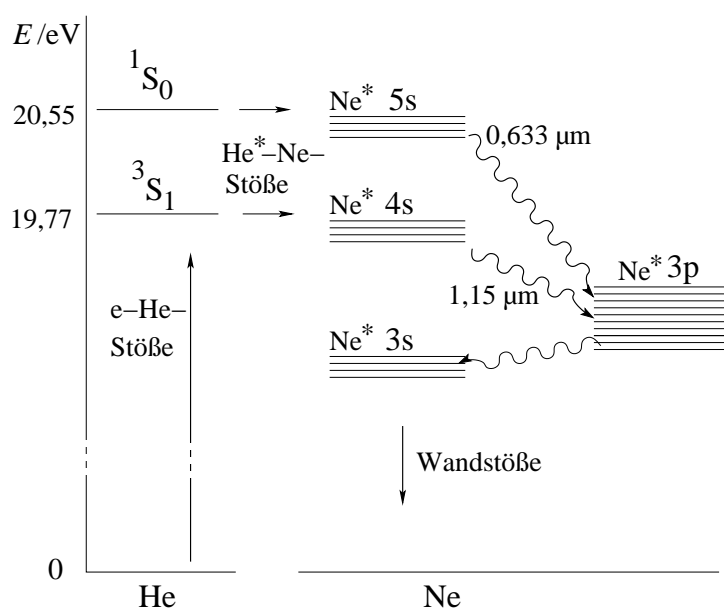


Abbildung 170. Energieniveauschema des Helium-Neon-Gasgemisches. Eingezeichnet sind die Laserübergänge zwischen den Niveaus $\text{Ne}^* 4s$ bzw. $\text{Ne}^* 5s$ und $\text{Ne}^* 3p$. Die Niveaus $\text{Ne}^* 4s$ und $\text{Ne}^* 5s$ sind stärker besetzt als die $\text{Ne}^* 3p$ -Niveaus (Besetzungsinversion). Sie werden vorwiegend durch Atomstöße zwischen angeregten Heliumatomen und Neonatomen gefüllt. Die unteren $\text{Ne}^* 3p$ -Laserniveaus werden durch spontane Strahlungsübergänge zu den $\text{Ne}^* 3s$ -Niveaus entleert, und diese wiederum durch Stöße mit der Wand der Kapillare.

eine Besetzungsinversion zwischen den 4s- und 5s-Niveaus (obere Energieniveaus E_a , die Elektronenkonfigurationen der angeregten Neon-Atome ist $\text{Ne}^* 4s$ bzw. $\text{Ne}^* 5s$ (mit $\text{Ne}^* = 1s^2 2s^2 2p^5$), s.S.472, 1255) und den 3p-Niveaus (untere Energieniveaus E_u , die Elektronenkonfigurationen der niedriger angeregten Neon-Atome ist $\text{Ne}^* 3p$) einstellt, s. Abb.170. Diese Besetzungsinversion kommt zum einen dadurch zustande, dass die in der Überzahl vorhandenen Helium-Atome durch Elektronenstöße in die angeregten Niveaus 3S_1 und 1S_0 (die Elektronenkonfigurationen der angeregten Helium-Atome He^* ist $1s2s$, s. Abb.251, S.478) gelangen, die auf Grund der Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge (s.S.464) eine so lange Lebensdauer besitzen, dass sie nicht durch Photonenemission in den Grundzustand zurückkehren, sondern viel eher mit nichtangeregten Neon-Atomen zusammenstoßen und dabei ihre Energie an die Neon-Atome weitergeben, die sich dann in den angeregten Zuständen $\text{Ne}^* 5s$ bzw. $\text{Ne}^* 4s$ befinden. Der Energietransfer $\text{He}^* + \text{Ne} \rightarrow \text{He} + \text{Ne}^* 4s/5s$ ist besonders günstig, da die $\text{Ne}^* 5s$ - bzw. $\text{Ne}^* 4s$ -Energietermine nahezu den gleichen energetischen Abstand vom Grundzustand besitzen wie die angeregten 3S_1 und 1S_0 -Zustände des Heliums (Resonanzenergieübertragung). Auf der anderen Seite ist die mittlere Lebensdauer der angeregten Zustände $\text{Ne}^* 5s$ bzw. $\text{Ne}^* 4s$ etwa um den Faktor 10 größer als die der $\text{Ne}^* 3p$ -Niveaus, die spontan in die darunter liegenden $\text{Ne}^* 3s$ -Zustände zerfallen. Die $\text{Ne}^* 3s$ -Zustände sind ebenso wie die 3S_1 und 1S_0 -Zustände des Heliums metastabil (elektrische Dipolübergänge in den Grundzustand sind verboten). Damit die Besetzungsinversion im Neon-Energieniveauschema (s. Abb.170) aufrecht erhalten werden kann, müssen die $\text{Ne}^* 3s$ -Niveaus hinreichend schnell durch Übergänge in den Grundzustand entvölkert werden. Dies ist möglich durch Stöße der Ne-Atome mit der Wand der Kapillare, die daher möglichst eng gewählt wird. Aus dem Energieniveauschema in Abb.170 sieht man, dass im Helium-Neon-Laser bei mehreren Übergängen eine Besetzungsinversion vorhanden ist, d. h. dass mehrere Übergänge für eine Laserstrahlung ausgewählt werden können. Die beiden gebräuchlichsten sind die von $\text{Ne}^* 5s$ nach $\text{Ne}^* 3p$ ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$) bzw. von $\text{Ne}^* 4s$ nach $\text{Ne}^* 3p$ ($\lambda = 1152 \text{ nm}$). Die Auswahl eines speziellen Übergangs und seiner Strahlungsfeldcharakteristik (d.h. Frequenzbreite, Polarisierung und transversale Intensitätsverteilung) für die Lasertätigkeit heißt **Modenselektion** (mode selection). Die Verstärkung einer gewünschten Linie erreicht man dadurch, dass man im aktiven Lasermaterial (hier Neon-Atome mit Besetzungsinversion) stehende Wellen der betreffenden Wellenlänge mit einer bestimmten transversalen Intensitätsverteilung erzeugt. In Abb.169 wird durch die Anordnung der beiden Spiegel ein optischer Resonator gebildet, in dem sich stehende Lichtwellen bilden können, deren Wellenlänge, analog zu den stehenden Schallwellen in einer Pfeife mit geschlossenen Enden (vgl.S.91), der Bedingung $\kappa\lambda/2 = \ell$ genügen muss. Die ganze Zahl κ ist gewöhnlich sehr groß, für $\ell = 30 \text{ cm}$ und $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ erhält man $\kappa \approx 9,5 \cdot 10^5$. Die transversale Intensitätsverteilung im Laserstrahl wird durch strahlbegrenzende Blenden und die Größe und Krümmung der Resonatorspiegel bestimmt und kann durch zwei kleine ganze Zahlen (l, m) charakterisiert werden. Das Zahlentripel (κ, l, m) definiert eine **Eigenmode**

(eigenmode) des optischen Laserresonators. Der Wellenlängenabstand benachbarter longitudinaler Moden ergibt sich zu $\Delta\lambda = 2\ell/\kappa - 2\ell/(\kappa + 1) \approx 2\ell/\kappa^2$. Für den Frequenzabstand $\Delta f \approx |(c/\lambda^2)\Delta\lambda|$ folgt mit $\lambda = 2\ell/\kappa$ und $\Delta\lambda \approx 2\ell/\kappa^2$ die Beziehung $\Delta f \approx c/(2\ell)$. Im betrachteten Beispiel ergibt sich also $\Delta f \approx 0,5$ GHz. Da sich die Neon-Atome im Laser bewegen (Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung) und da die Photonenemission der Atome durch Stöße gestört wird, sind die von den Atomen in der Gasentladungsröhre emittierten Spektrallinien inhomogen verbreitert (Doppler- und Stoßverbreiterung), wobei die Halbwertsbreite bei etwa 1...2 GHz liegt und damit im vorliegenden Beispiel 2...4 longitudinale Eigenmoden des Resonators umfaßt. Der optische Resonator des Lasers verstärkt diese die Spektrallinie überlappenden Eigenmoden, die man dann in der Laserstrahlung wiederfindet. Die spektrale Breite der Lasermode wird durch die Güte des Resonators (in Analogie zur Güte eines Schwingkreises, s.Gl.398) und durch die Quanteneigenschaften des Lichtfeldes im Laser bestimmt. Die Güte des optischen Resonators wächst mit den Reflexionskoeffizienten der verwendeten Spiegel und wird durch Strahlungsverluste (Streuung und Absorption bei der ausgewählten Wellenlänge an Laserbauelementen) kleiner. Durch Dämpfung unerwünschter Moden (Wahl geeigneter Filter und Blenden) kann man **Einmodenlaser** (single mode laser) konstruieren, deren spektrale Breite nur wenige Hertz beträgt. Die Festlegung der Polarisationsrichtung der Laserstrahlung erfolgt in Abb.169 durch die das Laserrohr auf beiden Seiten abschließenden **Brewster-Fenster** (Brewster windows). Dies sind planparallele Glasplatten, die um den Brewster-Winkel zur Symmetrieachse der Spiegel geneigt sind. Die zu verstärkenden Wellen, deren elektrischer Feldvektor in der Zeichenebene (Einfallebene) schwingt, treten ohne Verlust in das Brewster-Fenster ein. Alle anderen Wellenlängen und Polarisationsrichtungen werden an den Brewster-Fenstern von der Symmetrieachse wegreflektiert, erleiden dadurch Verluste und werden nicht verstärkt. Nach vielfachem Hin- und Herlaufen der Welle bleibt schließlich nur noch die gewünschte Mode mit der linearen Polarisation übrig. Das vom Laser emittierte Licht zeichnet sich durch eine zeitlich und räumlich weit ausgedehnte feste Phase und Polarisationsrichtung aus. Es ist gebündelt und kann durch zusätzliche Linsen weiter fokussiert werden. Durch schnelle Schaltung der Güte des Resonators können kurze (Piko- bis Femtosekunden) und sehr intensive (Giga- bis Terawatt) Lichtimpulse erzeugt werden.

In der Tab.70 sind experimentell bestimmte Linienbreiten Δf für verschiedene Lichtquellen angegeben. Die daraus mit den Gln.(478) bzw. (479), S.331, berechneten Werte für die mittlere Dauer (τ) und Länge (Kohärenzlänge λ_c) der emittierten Wellenzüge besitzen nur dann eine physikalische Bedeutung, wenn die Linien homogen verbreitert sind. Dies gilt für Laserlicht und näherungsweise auch für das Licht gekühlter Spektrallampen.

Eine Analogie zum Schall soll schließlich noch die Bedeutung der verschiedenen Arten von Licht erläutern: Wir betrachten eine größere Anzahl im Raum verteilter Lautsprecher (Lichtquellen). *Natürliches weißes Licht* entspricht dann dem Schall,

der entsteht, wenn jeder Lautsprecher zu statistisch verteilten Zeiten einen Ton abgibt, der nur kurz ist und dessen Frequenzen über ein breites Intervall verteilt sind. *Natürliches farbiges Licht*, wie man es nach dem Durchgang durch ein Farbfilter erhält, bedeutet, dass die Frequenzen auf ein mehr oder weniger schmales Intervall beschränkt sind. Das Licht, das von einer *Spektrallinie* herrührt, entspricht dem Schall, bei dem alle Frequenzen gleich sind. Die Analogie zum **kohärenten Licht** (coherent light), ist der Schall, der entsteht, wenn alle Lautsprecher mit der gleichen Frequenz und jeder mit fester Phase einen (im Idealfall unendlich langen) Ton abgeben. Zwischen kohärenten Lichtstrahlen besteht demnach über einen bestimmten Raum- und Zeitbereich eine feste Phasenbeziehung. Ü 137 Ü 138

Tabelle 70. Linienbreite Δf und daraus berechnete mittlere Dauer (τ) und Länge (λ_c) der emittierten Wellenzüge für einige Lichtquellen. λ_c ist die Kohärenzlänge der betreffenden Lichtquelle (s.S.331)

Lichtquelle	Δf	$\tau = 1/\Delta f$	$\lambda_c = c_0 \tau$
weißes Licht mit Farbfilter	ca. 10^{14} Hz	(0,01 ps)	(3 μm)
Spektrallampe bei Zimmertemperatur	1,5 GHz	(0,67 ns)	(0,2 m)
Spektrallampe gekühlt (77 K)	500 MHz	2 ns	0,6 m
Halbleiterlaser	2 MHz	0,5 μs	150 m
Einmoden-Helium-Neon-Laser	10 Hz	0,1 s	30000 km

22.2 Interferenz

Die Überlagerung kohärenter Lichtstrahlen nennt man **Interferenz** (interference). Handelt es sich um parallele Strahlen, so spricht man von **Fraunhofer-Interferenz** (Fraunhofer interference, Joseph von Fraunhofer 1787-1826), ansonsten von **Fresnel-Interferenz** (Fresnel interference, Jean Augustin Fresnel 1788-1827). Räumliche Hindernisse, wie z.B. eine Kante oder ein Schirm mit einem Spalt, geben Anlass zu Interferenzen, deren Gesamtheit man als **Beugung** (diffraction) bezeichnet. **Interferenzfarben** (interference colors) treten dann auf, wenn von einfallendem weißem Licht ein gewisser Wellenlängenbereich durch Interferenz ausgelöscht wird. Auf diese Weise entstehen z.B. die schillernden Farben der Seifenblasen, der dünnen Ölschichten auf regennassen Fahrbahnen oder auch der (sich beim Erhitzen bildenden) dünnen Oxidschichten auf blanken Metalloberflächen (**Anlauffarben**, annealing colors). Die Ursache ist die Interferenz zwischen dem an der Vorder- und der Rückseite einer durchsichtigen Schicht reflektierten Licht. Als Beispiel für Fraunhofer-Interferenzen betrachten wir die **Newton-Ringe** (Newton rings, Isaac Newton 1643-1727). Auf eine plankonvexe Linse, die auf einer ebenen Glasplatte

liegt (s. Abb. 171), falle von oben senkrecht paralleles Licht mit der Wellenlänge λ . Dann sieht man (bei Betrachtung von oben) konzentrische dunkle Ringe, die nach außen hin in ihrer Intensität umso stärker abnehmen, je kleiner die Kohärenzlänge des Lichtes ist. Für den Radius dieser Ringe ergibt sich

$$r = (\kappa R \lambda)^{1/2} \quad (484)$$

mit $\kappa = 0, 1, 2, \dots$. Diese Gleichung kann bei bekanntem Krümmungsradius R der Linse zur Wellenlängenmessung benutzt werden.

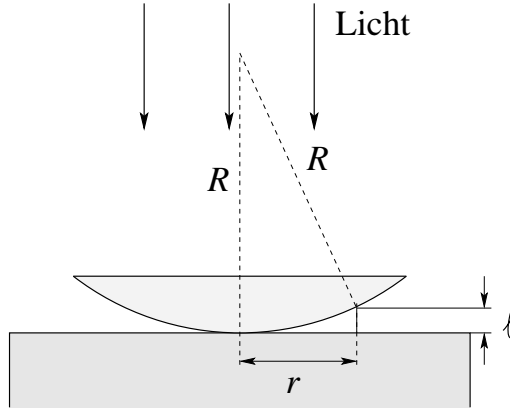
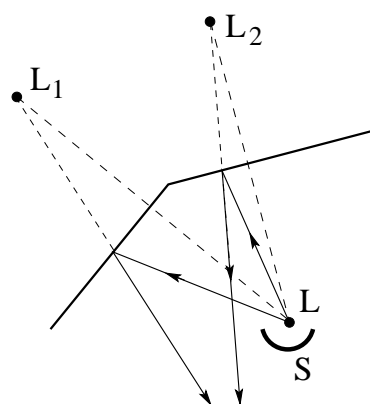


Abbildung 171. Zur Entstehung der Newton-Ringe. R ist der Krümmungsradius der plattkonvexen Linse und 2ℓ der Wegunterschied zwischen den beiden Strahlen, die im Abstand r von der Mitte, an der Unterseite der Linse bzw. der Oberseite der Glasplatte reflektiert werden

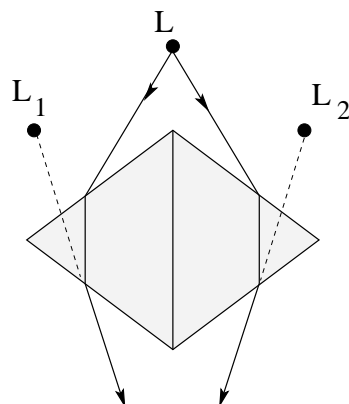
Der Wegunterschied zwischen den beiden Strahlen, die an der Unterseite der Linse bzw. an der Oberseite der Glasplatte reflektiert werden, ist nach Abb. 171 gleich 2ℓ . Diese Größe ergibt sich aus der Beziehung $r^2 + (R - \ell)^2 = R^2$ und unter der Voraussetzung $\ell \ll R$ zu $2\ell = r^2/R$. Da bei der Reflexion an der Oberseite der Glasplatte (d.h. an der Grenze von einem optisch dünneren (Luft) zu einem optisch dichteren Stoff (Glas)) ein Phasensprung π auftritt (s. S. 373), beträgt die gesamte Phasenverschiebung zwischen den beiden reflektierten Strahlen $(2\ell/\lambda)2\pi + \pi$. Auslöschung tritt auf, wenn diese Phasenverschiebung gleich $(2\kappa + 1)\pi$ mit $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ ist. Damit folgt $2\ell/\lambda = \kappa$. Einsetzen von $2\ell = r^2/R$ ergibt $r^2 = \kappa R \lambda$, d.h. die gesuchte Gl. (484).

Fresnel-Interferenzen lassen sich mit zwei punktförmigen Lichtquellen erzeugen. Allerdings müssen die beiden Lichtquellen kohärentes Licht ausstrahlen. Diese Bedingung erfüllt man am einfachsten dadurch, dass man mit Hilfe der geometrischen Optik von einer realen punktförmigen Lichtquelle L zwei virtuelle Bilder L_1 und L_2 entwirft, die dann Fresnel-Interferenzen erzeugen (s. die Abb. 172 und Abb. 173). Die mitunter für *kohärent* verwendete Bezeichnung *interferenzfähig* sollte man nach Möglichkeit vermeiden, da sich, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, auch mit nichtkohärenten Lichtquellen Interferenzen erzeugen lassen.



Interferenzgebiet

Abbildung 172. Fresnel'scher Doppelspiegel (Fresnel mirrors). S ist ein Schirm, mit dem die Lichtquelle L gegenüber dem Interferenzgebiet abgedeckt wird, so dass dort nur die beiden virtuellen Lichtquellen L_1 und L_2 interferieren



Interferenzgebiet

Abbildung 173. Fresnel'sches Biprisma (Fresnel biprism)

Ü 139 Ü 140 A 124 A 125 A 126 A 127 A 128 A 129 A 130 A 131

22.3 Interferenz inkohärenter Strahlungsquellen

In Abb. 174 bezeichnen L_1 und L_2 zwei punktförmige Lichtquellen mit dem Abstand ℓ , die Licht der gleichen Frequenz und Intensität abstrahlen. Das Licht sei jedoch inkohärent.

Der Schirm, auf dem die Interferenzen gemessen werden sollen, sei parallel zu ℓ . Da es sich um inkohärentes Licht handelt, kommt es nicht zur Ausbildung von Fresnel-Interferenzen: Die von einem Detektor D gemessene Intensität I zeigt bei einer Verschiebung auf dem Schirm parallel zu ℓ keinerlei Periodizitäten. Wenn man aber *zwei* Detektoren D_0 und D einsetzt und deren jeweils zum gleichen Zeitpunkt gemessenen Intensitäten I_0 und I miteinander multipliziert, so ergibt sich nach Mittelung über eine große Anzahl von Einzelmessungen

$$\langle I_0 I \rangle = \frac{1}{3} \langle I_0^2 \rangle \{2 + \cos[(2\pi\ell/\lambda) \sin \delta]\}. \quad (485)$$

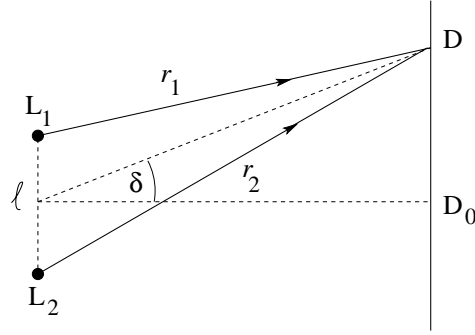


Abbildung 174. Intensitätsinterferometrie. L_1 und L_2 sind zwei inkohärente Lichtquellen. Die von den beiden Detektoren D_0 und D gleichzeitig gemessenen Intensitäten I_0 und I werden multipliziert und das Produkt wird über eine große Anzahl von Experimenten gemittelt

Für die an der Stelle des Detektors D herrschende elektrische Feldstärke gilt $E(t) = \hat{E} \cos(\omega t - kr_1) + \hat{E} \cos(\omega t - kr_2 - \psi)$, wobei k für $2\pi/\lambda$ steht und die Inkohärenz durch die statistisch von der Zeit abhängige Phase ψ charakterisiert wird. Unter Verwendung des Additionstheorems $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\{[\alpha + \beta]/2\} \cos\{[\alpha - \beta]/2\}$ folgt $E(t) = 2\hat{E} \cos\{[k(r_1 + r_2) - 2\omega t + \psi]/2\} \cos\{[k(r_1 - r_2) - \psi]/2\}$. Für die Intensität, die der Detektor D misst, ergibt sich, da diese proportional zu dem über eine Periode ($2\pi/\omega$) gemittelten Quadrat der elektrischen Feldstärke ist, $I = C \langle E^2(t) \rangle_t = 2C\hat{E}^2 \cos^2\{[k(r_1 - r_2) - \psi]/2\}$. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt nun (s. Abb. 174), dass die Differenz $r_2 - r_1$ für $(r_1 + r_2)/2 \gg \ell$ durch $\ell \sin \delta$ ersetzt werden kann. Damit folgt $I = 2C\hat{E}^2 \cos^2[(\phi + \psi)/2]$ mit $\phi = (2\pi\ell/\lambda) \sin \delta$. Analog erhält man für den Detektor D_0 , der sich bei $\delta = 0$ befindet, $I_0 = 2C\hat{E}^2 \cos^2(\psi/2)$ und für das Produkt $I_0 I$ den Ausdruck $I_0 I = 4C^2\hat{E}^4 \cos^2[(\phi + \psi)/2] \cos^2(\psi/2)$. Mit dem Additionstheorem $\cos^2(\alpha/2) = (1 + \cos \alpha)/2$ lässt sich dies umschreiben in $I_0 I = C^2\hat{E}^4 [1 + \cos(\phi + \psi)] \cdot [1 + \cos \psi]$. Die Mittelung von $I_0 I$ über eine große Anzahl von Einzelexperimenten entspricht einer Mittelung über ψ , so dass sich $\langle I_0 I \rangle = \langle C^2\hat{E}^4 [1 + \cos(\phi + \psi)] [1 + \cos \psi] \rangle_\psi$ ergibt. Mit $\cos(\phi + \psi) = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi$ und $\langle \cos \psi \rangle_\psi = \langle \sin \psi \cos \psi \rangle_\psi = 0$ sowie $\langle \cos^2 \psi \rangle_\psi = 1/2$ folgt schließlich $\langle I_0 I \rangle = C^2\hat{E}^4 [1 + (1/2) \cos \phi]$ oder, wegen $\langle I_0^2 \rangle = (3/2)C^2\hat{E}^4$, die gesuchte Gl. (485).

Man erhält also ein typisches Interferenzmuster, bei dem sich die Messgröße $\langle I_0 I \rangle$ periodisch mit dem Winkel δ ändert (**Intensitätsinterferometrie**, intensity interferometry). Voraussetzung für die Gültigkeit von Gl. (485) ist allerdings, dass die Zeitkonstanten der Detektoren und der elektronischen Schaltung, mit der die Produktbildung bewerkstelligt wird, klein sind gegen die mittlere Dauer τ der von den Lichtquellen emittierten Wellenzüge. Als Anwendung von Gl. (485) betrachten wir zwei Radioteleskope, die auf eine Wellenlänge $\lambda = 0,3$ m abgestimmt sind und die Strahlung von einem Doppelstern empfangen, dessen Entfernung 10^{15} km betrage. Das gemessene mittlere Intensitätsprodukt zeige in Abhängigkeit vom Abstand zwischen den beiden Radioteleskopen ein erstes Minimum bei 2 km. Daraus folgt für den Abstand zwischen den beiden Doppelsternen $\ell = 7,5 \cdot 10^{10}$ km.

Nach Gl.(485) gilt für das erste Minimum $(2\pi\ell/\lambda)\sin\delta = \pi$ mit $\sin\delta \approx \delta = 2/10^{15}$. Die Auflösung nach ℓ gibt die Beziehung $\ell = \lambda/(2\delta)$ oder $\ell = 7,5 \cdot 10^{10}$ km.

22.4 Zwei- und dreidimensionale Gitter

22.4.1 Optische Gitter (zweidimensionale Gitter)

Als **optisches Gitter** (diffraction grating) bezeichnet man eine große Anzahl (N) paralleler Spalte gleichen Abstands (g) und gleicher Breite (b). Der Abstand zweier benachbarter Spalte (g , s.Abb.175) heißt **Gitterkonstante** (grating constant oder grating spacing). Auf ein solches Gitter, das man auch als **Transmissionsgitter** (transmission diffraction grating) bezeichnet, falle senkrecht paralleles Licht der Wellenlänge λ .

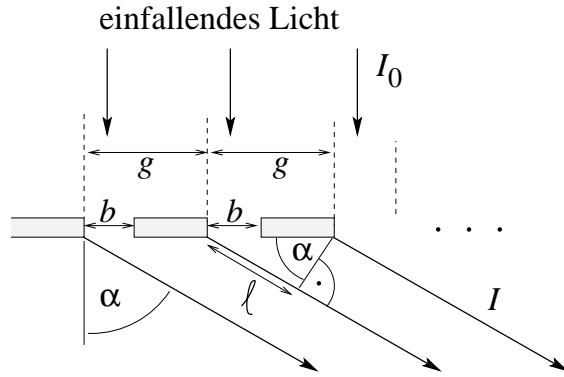


Abbildung 175. Optisches Transmissionsgitter. Die Pfeile unterhalb des Gitters kennzeichnen das Licht, das von dem Gitter in die Richtung α abgestrahlt wird. I_0 und I sind die Intensitäten des einfallenden bzw. des transmittierten Lichtes.

Die Interferenzen des hindurchgetretenen Lichtes sollen in einem großen Abstand vom Gitter oder, was gleichbedeutend damit ist, in der Brennebene einer hinter dem Gitter aufgestellten Sammellinse betrachtet werden. Dies bedeutet, dass man nur die Überlagerung *paralleler* Lichtstrahlen zu untersuchen hat (**Fraunhofer-Beugung**, Fraunhofer diffraction, Joseph von Fraunhofer 1787-1826).

Für das Weitere nehmen wir zunächst an, dass die Breite der Spalte vernachlässigbar klein sei ($b \ll g$). Dann ergibt sich aus Abb.175 als Bedingung für maximale Helligkeit $\ell = \kappa\lambda$ mit $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ oder, wegen $\sin\alpha = \ell/g$,

$$\sin\alpha = \kappa \frac{\lambda}{g}. \quad (486)$$

Auslöschung tritt auf für $\ell = (2\kappa + 1)\lambda/2$ mit $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ oder

$$\sin \alpha = \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{g}. \quad (487)$$

Diese beiden Gleichungen folgen auch aus der allgemeinen Beziehung für die Intensität I des Lichtes, das von dem Gitter in der Richtung α abgestrahlt wird. Dafür ergibt sich

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\pi\xi)}{\sin^2(\pi\xi)} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{g}{\lambda} \sin \alpha. \quad (488)$$

Aus Abb.175 folgt für die Phasenverschiebung ϕ zwischen zwei benachbarten Strahlen $\phi = 2\pi\ell/\lambda = 2\pi(g \sin \alpha)/\lambda$. Für die resultierende elektrische Feldstärke infolge der Überlagerung aller Strahlen in Richtung α gilt $E(t) = \sum \hat{E} \cos(\omega t + n\phi)$, wobei die Summe von $n = 0$ bis $n = N - 1$ zu erstrecken ist und ω die zur Wellenlänge λ gehörige Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi c/\lambda$) bezeichnet. Zur Berechnung der Summe $\sum \cos(\omega t + n\phi)$ verwenden wir die Euler'sche Formel $\exp(i\beta) = \cos \beta + i \sin \beta$, d.h. wir schreiben $\sum \cos(\omega t + n\phi) = \text{Re}\{\sum \exp(i\omega t + in\phi)\}$. Wegen $\sum \exp(i\omega t + in\phi) = [\exp(i\omega t)] \sum \exp(in\phi)$ ist es erforderlich, die Summe $\sum q^n$ mit $q = \exp(in\phi)$ zu berechnen. Dazu gehen wir folgendermaßen vor. Wir multiplizieren $\sum q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1}$ auf beiden Seiten mit q und subtrahieren auf beiden Seiten $\sum q^n$. Damit folgt $q \sum q^n - \sum q^n = -1 + q^N$, woraus sich $\sum q^n = (q^N - 1)/(q - 1)$ ergibt. Unter Verwendung dieser Beziehung erhalten wir $E(t) = \hat{E} \text{Re}\{[\exp(i\omega t)] \cdot [\exp(in\phi) - 1]/[\exp(i\phi) - 1]\}$. Die Amplitude von $E(t)$ ist demnach gleich $\hat{E} |[\exp(in\phi) - 1]/[\exp(i\phi) - 1]|$, wofür wir nach der Euler'schen Formel $\hat{E} |[\cos N\phi - 1 + i \sin N\phi]/[\cos \phi - 1 + i \sin \phi]|$ oder auch $\hat{E} \{[(\cos N\phi - 1)^2 + \sin^2 N\phi]/[(\cos \phi - 1)^2 + \sin^2 \phi]\}^{1/2}$ schreiben können. Wegen $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ und $1 - \cos \beta = 2 \sin^2 \beta/2$ erhalten wir für das *Quadrat* dieser Amplitude den einfachen Ausdruck $\hat{E}^2 [\sin^2(N\phi/2)]/(\sin^2 \phi/2)$. Da die Intensität I des Lichtes proportional zum Quadrat der Amplitude der elektrischen Feldstärke ist, folgt $I = I_0 [\sin^2(N\phi/2)]/(\sin^2 \phi/2)$, wobei I_0 die Intensität des einfallenden Lichtes bezeichnet. Unter Beachtung von $\phi = 2\pi(g \sin \alpha)/\lambda$ ist dieses Ergebnis identisch mit der gesuchten Gl.(488).

In der Abb.176 ist die relative Lichtintensität I/I_0 nach Gl.(488) für ein Gitter mit $N = 1000$ Spalten als Funktion der Größe $\xi = (g/\lambda) \sin \alpha$ dargestellt. Abb.177 zeigt die entsprechende Abhängigkeit für $N = 10$. A 132 A 133 A 134

Hauptmaxima (principal maxima) entstehen nach Gl.(488) dann, wenn der Nenner verschwindet. Diese Bedingung führt zur Gl.(486). Die Zahl κ wird als **Ordnung** (order of diffraction) des betreffenden Hauptmaximums bezeichnet. Die relative Intensität eines Hauptmaximums ergibt sich zu $I/I_0 = N^2$.

Da für $\xi = 0, 1, 2, \dots$ Nenner und Zähler verschwinden, der Quotient also unbestimmt ist, muss die Regel von L'Hospital angewendet werden. Dies bedeutet, Zähler und Nenner der Gl.(488) solange nach dem Argument zu differenzieren, bis der Quotient nicht

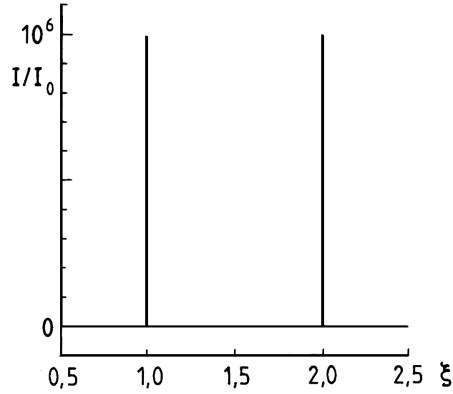


Abbildung 176. Relative Lichtintensität I/I_0 bei der Fraunhofer-Beugung an einem Gitter bestehend aus $N = 1000$ Spalten als Funktion der Größe $\xi = (g/\lambda) \sin \alpha$ (s. Abb. 175, S. 341)

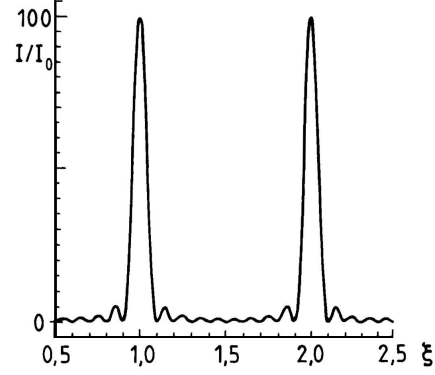


Abbildung 177. Wie Abb. 176, aber für $N = 10$

mehr unbestimmt ist. Die erste Differentiation nach ξ liefert $[2N\pi \sin N\pi\xi \cos N\pi\xi] / [2\pi \sin \pi\xi \cos \pi\xi]$. Da auch dieser Quotient für $\xi = 0, 1, 2, \dots$ noch unbestimmt ist, differenzieren wir ein zweites Mal und erhalten $[2(N\pi)^2 \cos^2 N\pi\xi - 2(N\pi)^2 \sin^2 N\pi\xi] / [2\pi^2 \cos^2 \pi\xi - 2\pi^2 \sin^2 \pi\xi]$, woraus sich mit $\xi = 0, 1, 2, \dots$ das Resultat $I/I_0 = N^2$ ergibt.

Das nullte Hauptmaximum, d.h. $\kappa = 0$, liegt bei $\alpha = 0$. Es entspricht der Lichtausbreitung nach der geometrischen Optik. Mit größer werdendem α nimmt I/I_0 sehr schnell ab und besitzt eine erste Nullstelle bei $N\pi\xi = \pi$ oder $\sin \alpha = \lambda/(gN)$. Danach kommt es zur Ausbildung eines ersten Nebenmaximums bei $N\pi\xi = 3\pi/2$ oder $\sin \alpha = (3/2)\lambda/(gN)$. Dessen relative Intensität I/I_0 ergibt sich aus Gl. (488) zu $I/I_0 = \sin^{-2}(3\pi/2N) \approx (3\pi/2)^{-2}N^2$ (wegen $N \gg 1$). Dies sind ca. 4,5% der Intensität eines Hauptmaximums.

Ohne Beweis soll hier noch die der Gl. (488) entsprechende Beziehung für eine endliche Breite b der Spalte angegeben werden. Es gilt

$$I = I_0 \frac{\sin^2[(\pi b/\lambda) \sin \alpha]}{(\pi b/\lambda)^2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 N\pi\xi}{\sin^2 \pi\xi} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{g}{\lambda} \sin \alpha. \quad (489)$$

Man sieht leicht, dass diese Beziehung für $\pi b \ll \lambda$ in die Gl. (488) übergeht. Der Vorfaktor in Gl. (489) hat zur Folge, dass die relative Intensität der Hauptmaxima nicht konstant ist, sondern mit wachsender Ordnung kleiner wird.

Reflexionsgitter (reflection gratings) entstehen dadurch, dass man z.B. in eine raue Oberfläche parallele, reflektierende Furchen einritz (s. Abb. 178), die im Prin-

zip die gleiche Wirkung wie die Spalte beim Transmissionsgitter (s. Abb. 175, S. 341) haben. Reflexionsgitter besitzen aber folgende drei Vorteile:

- (1) Durch Krümmung der Oberfläche (Hohlspiegelwirkung) wird die Sammellinse entbehrlich und damit entfallen die mit der Lichtabsorption im Linsenmaterial verbundenen Intensitätsprobleme.
- (2) Durch eine geeignete Neigung der reflektierenden Furchen, d.h. in Abb. 178, sind die stark gezeichneten Striche um einen bestimmten Winkel (**Blazewinkel**, blaze angle, nach to blaze = hell aufleuchten) gegenüber der Horizontalen zu drehen, lässt sich erreichen, dass praktisch die gesamte reflektierte Intensität im Spektrum einer bestimmten Ordnung konzentriert wird (**Echelettegitter**, echelette grating, nach échelette = Leiterchen).
- (3) Durch **streifenden Einfall** (grazing incidence) lässt sich die Gitterkonstante eines Reflexionsgitters effektiv verkleinern und damit der Anwendungsbereich nach kürzeren Wellenlängen bis in das Gebiet langwelliger Röntgenstrahlen erweitern. Den Strahlengang zeigt Abb. 178. Um einen Vergleich mit der Abb. 175 auf S. 341 zu ermöglichen, führen wir die Größe $\alpha = \phi' - \phi$ ein, da dann $\alpha = 0$ in beiden Fällen das Ergebnis der geometrischen Optik liefert, das als Hauptmaximum nullter Ordnung bezeichnet wird. Das Hauptmaximum erster Ordnung ergibt sich bei streifendem Einfall ($\phi \rightarrow 0$) für

$$\alpha = \frac{\lambda}{g\phi}. \quad (490)$$

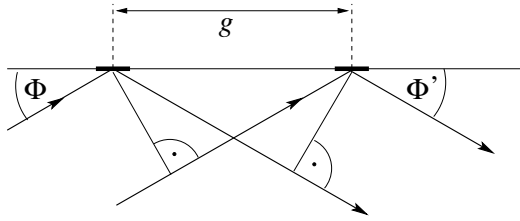


Abbildung 178. Strahlengang bei einem Reflexionsgitter für streifenden Einfall ($\phi \rightarrow 0$). Die stark gezeichneten Striche bezeichnen die reflektierenden Furchen

Aus Abb. 178 liest man ab, dass sich die beiden reflektierten Strahlen verstärken, wenn der Wegunterschied $g \cos \phi - g \cos \phi'$ gleich null oder ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge λ ist. Das heißt, es muss gelten $g \cos \phi - g \cos \phi' = \kappa \lambda$ mit $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ Für $\kappa = 0$ ergibt sich das Resultat der geometrischen Optik $\phi = \phi'$, das wir als nulltes Hauptmaximum bezeichnet haben. Für das erste Hauptmaximum folgt wegen $\phi, \phi' \ll 1$ die Beziehung $g[1 - \phi^2/2] - g[1 - (\phi')^2/2] = \lambda$ oder $(\phi')^2 - \phi^2 = 2\lambda/g$. Mit $(\phi')^2 - \phi^2 = (\phi' - \phi)(\phi' + \phi) \approx (\phi' - \phi)2\phi$ und $\alpha = \phi' - \phi$ ergibt sich die gesuchte Gl. (490).

Beim Transmissionsgitter ergab sich als Bedingung für das erste Hauptmaximum (s. Gl. (486), S. 341, mit $\kappa = 1$ und $\alpha \ll 1$) die Gleichung $\alpha = \lambda/g$. Aus einem Vergleich

mit Gl.(490) folgt, dass bei streifendem Einfall die Gitterkonstante g verkürzt wird auf

$$g_{\text{eff}} = g\phi, \quad (491)$$

d.h. wegen $\phi \rightarrow 0$ auf einen viel kleineren Wert. Dieses Prinzip, Strahlung streifend in derjenigen Richtung einfallen zu lassen, in der eine Periodizität vorliegt, wird bei der **Kleinwinkelstreuung** von Röntgenstrahlen (small-angle X-ray scattering) ausgenutzt, um periodische Strukturen auszumessen, deren Periode g groß gegen die verwendete Wellenlänge λ ist. Ü 141 Ü 142

22.4.2 Kristallgitter (dreidimensionale Gitter)

Auf einen **Einkristall** (monocrystal, single crystal), d.h. auf eine Probe, die aus einem einzigen Kristall besteht, soll ein Röntgenstrahl mit einem kontinuierlichen Spektrum, z.B. von $\lambda = 0,02$ nm bis 0,2 nm, fallen. Dann entsteht auf einem senkrecht dahinter stehenden Schirm ein System von Intensitätsmaxima, das in Bezug auf den zentralen Strahl, also auf das Hauptmaximum nullter Ordnung, die gleiche Symmetrie aufweist, wie der Kristall in der betreffenden Richtung. Die Versuchsanordnung ist schematisch in Abb.179 dargestellt. Man bezeichnet sie als **Laue-Verfahren** (Laue method) und die entstehenden Intensitätsmaxima als **Laue-Interferenzen** (Laue patterns, Max von Laue 1879-1960).

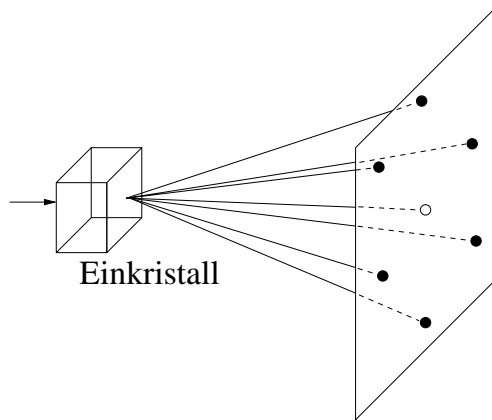


Abbildung 179. Röntgenbeugung an einem feststehenden Einkristall, der nicht größer als ca. 1 mm zu sein braucht, (Laue-Verfahren). \circ bezeichnet das Hauptmaximum nullter Ordnung (zentraler Strahl)

Es scheint so, als ob in dem Kristall viele kleine Spiegel mit diskreten Orientierungen existieren würden. Nach Bragg *Vater und Sohn* (William Henry Bragg 1862-1942, William Lawrence Bragg 1890-1971) handelt es sich dabei um die **Netzebenen**

(scattering planes oder lattice planes) des Kristalls. Um diesen Begriff zu erläutern, betrachten wir als einfachstes Beispiel einen kubischen Kristall. Ein solcher Kristall entsteht durch räumliche Wiederholung der in Abb.180a dargestellten Einheitszelle, die aus einem Würfel besteht, in dessen Ecken die Atome sitzen. Abb.180b zeigt die Anordnung der Kristallatome in einer Ebene, die durch eine der Würfelseiten gegeben ist. Eine erste Sorte von Netzebenen wird durch die horizontalen Schichten gebildet (horizontale Linien in Abb.180b), eine zweite durch die vertikalen Schichten (vertikale Linien in Abb.180b), eine dritte durch die um 45° geneigten Schichten (gestrichelte Linien in Abb.180b) usw. Der Abstand d zwischen zwei benachbarten Netzebenen der gleichen Sorte ist i.Allg. von der Kantenlänge a der Einheitszelle verschieden. Lediglich für die beiden ersten genannten Sorten von Netzebenen gilt $d = a$. Durch selektive Reflexion des Primärstrahls an diesen verschiedenen Sorten von Netzebenen ergeben sich die in Abb.179 dargestellten Laue-Interferenzen. Die Selektivität der Reflexion folgt aus Abb.181, in der der Primärstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha = (\pi/2) - \vartheta$ auf eine bestimmte Sorte von Netzebenen mit dem Abstand d falle. Die Intensität der reflektierten Strahlen wird dann maximal, wenn die **Bragg-Beziehung** (Bragg equation)

$$2d \sin \vartheta = \kappa \lambda \quad (492)$$

mit $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ erfüllt ist. Man beachte hierbei, dass ϑ nicht der Einfallswinkel, sondern die Differenz zu $\pi/2$ ist und dass κ nicht beliebig groß sein kann, sondern durch die Bedingung $\sin \vartheta \leq 1$ begrenzt wird.

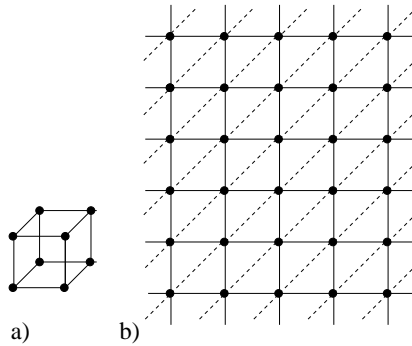


Abbildung 180. a) Einheitszelle eines kubischen Kristalls. Die Atome sitzen in den Ecken eines Würfels, dessen Kantenlänge a sei. b) Anordnung der Atome des Kristalls in einer Ebene, die durch eine der Würfelseiten gegeben wird

Der Gangunterschied zwischen den beiden reflektierten Strahlen ist $2\Delta\ell$. Damit folgt als Bedingung für maximale Intensität $2\Delta\ell = \kappa\lambda$ mit $\kappa = 1, 2, 3, \dots$. Andererseits gilt $\sin \vartheta = \Delta\ell/d$ oder $\Delta\ell = d \sin \vartheta$, so dass sich nach Einsetzen dieser Beziehung in die Bedingung $2\Delta\ell = \kappa\lambda$ die gesuchte Gl.(492) ergibt.

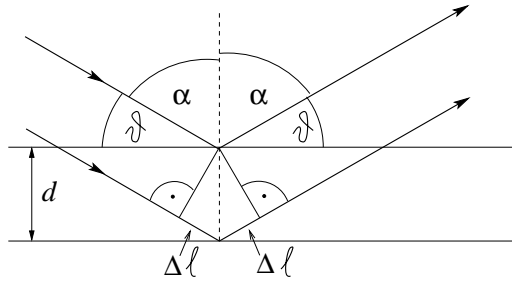


Abbildung 181. Zur Ableitung der Bragg-Beziehung (Gl.(492)). Einfallende Parallelstrahlen werden an Netzebenen mit dem Abstand d reflektiert und interferieren am weit entfernten Detektor

Das Laue-Verfahren ist gut geeignet zur schnellen Bestimmung einer Kristallorientierung und der Kristallsymmetrie. Auch der Anteil von Kristallfehlern oder von amorphem Material lässt sich auf diese Weise gut ermitteln. Da es aber wegen der spektralen Breite der verwendeten Röntgenstrahlen zur Überlagerung von Beugungsmaxima verschiedener Ordnung (verschiedene Werte für κ) kommen kann, verwendet man das Laue-Verfahren praktisch nie, um Kristallstrukturen zu bestimmen.

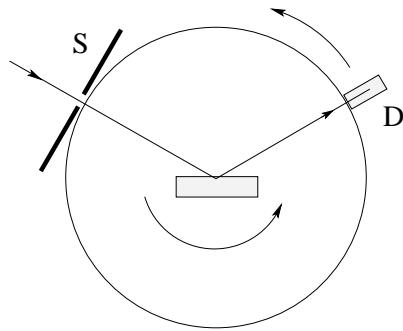


Abbildung 182. Bragg'sches Drehkristallverfahren. S bezeichnet den Spalt, der die einfallende monochromatische Röntgenstrahlung räumlich begrenzt. Mit dem Detektor D wird die Intensität des gebeugten Röntgenstrahls gemessen

Beim **Bragg'schen Drehkristallverfahren** (rotating crystal method) wird ein Einkristall, der ebenfalls nicht größer als ca. 1 mm zu sein braucht, in einem monochromatischen Röntgenstrahl, d.h. einem Röntgenstrahl mit geringer spektraler Breite, um eine feste Achse gedreht (s.Abb.182). Gleichzeitig wird der Detektor D, der die Intensität des gebeugten Strahles misst, nachgedreht. Auf diese Weise tritt nacheinander, und zwar jeweils bei Erfüllung der Bragg-Beziehung (s.Gl.(492)) Reflexion an verschiedenen Sorten von Netzebenen ein. Damit lassen sich Kristallstrukturen bestimmen. Die Genauigkeit wird umso größer, je geringer die spektrale Breite der "monochromatischen" Röntgenstrahlung ist, weshalb man diese bei komplizier-

teren Strukturen in zunehmendem Maße durch die Synchrotronstrahlung (s.S.247) ersetzt.

Wenn monochromatische Röntgenstrahlen eine Probe durchsetzen, die aus einer großen Anzahl von statistisch orientierten kleinen Kristallen (**Kristallite**, crystallites) bestehen, eine solche Probe bezeichnet man als **Pulverprobe** (powder sample), dann finden die Strahlen unter den vielen ungeordneten Kristalliten immer solche vor, deren Orientierung der Bragg-Beziehung (s.Gl.(492), S.346) genügt. Die Intensitätsmaxima liegen demzufolge auf Kegelmänteln um den Primärstrahl. Dieses nach Peter Debye und seinem Schüler Paul Scherrer (Peter Debye 1884-1966, Paul Scherrer 1890-1969) benannte **Debye-Scherrer-Verfahren** (Debye-Scherrer method) ist schematisch in der Abb.183 dargestellt.

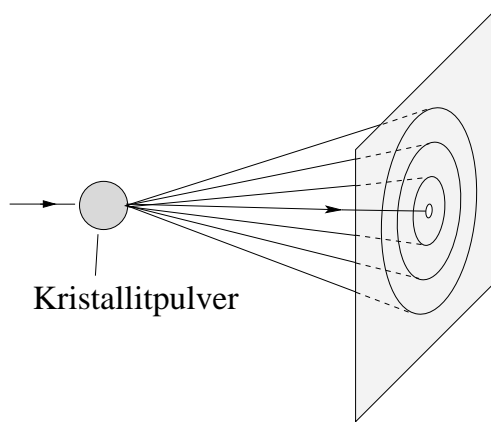


Abbildung 183. Beugung monochromatischer Röntgenstrahlen an einer Pulverprobe (Debye-Scherrer-Verfahren). \circ bezeichnet das Hauptmaximum nullter Ordnung (zentraler Strahl)

Die Schnitte der Kegelmäntel mit dem Schirm (photographischer Film) geben Kreise, die durch Zahlentripel, wie z.B. (113), charakterisiert werden. Sie heißen **Laue-Indizes** (Laue indices) und stellen das Produkt aus der Zahl κ in der Bragg-Beziehung (s.Gl.(492), S.346) und den Miller-Indizes der betreffenden Sorte von Netzebenen dar.

Mit den **Miller-Indizes** (Miller indices, William Hallows Miller 1801-1880) wird die Lage einer beliebigen Netzebene in einem Kristall charakterisiert. Um dies zu verstehen, definieren wir zunächst die **Einheitszelle** (unit cell) eines Kristalls als *die kleinste Einheit, aus der sich der Kristall durch räumliche Wiederholung aufbauen lässt*. Eine solche Einheitszelle wird durch ihre **Basisvektoren** (unit vectors) \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt (s.S.377), die durchaus nicht senkrecht aufeinander stehen müssen, wie bei einem kubischen Kristall, bei dem außerdem die drei Längen gleich sind ($|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$). Dann werden die Miller-Indizes durch folgende Vorschrift ermittelt:

- (1) Man bestimme die Schnittpunkte der zu charakterisierenden Ebene mit den durch \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} vorgegebenen Achsen. Die entstehenden Streckenabschnitte seien $n_a|\vec{a}|$, $n_b|\vec{b}|$ und $n_c|\vec{c}|$.
- (2) Man bilde das Zahlentripel $1/n_a, 1/n_b, 1/n_c$ und suche
- (3) die kleinsten ganzen Zahlen, die im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Diese sind die Miller-Indizes der betreffenden Ebene. Beispiele für die Miller-Indizes von drei verschiedenen Ebenen in einem kubischen Kristall zeigen die Abb. 184-186.

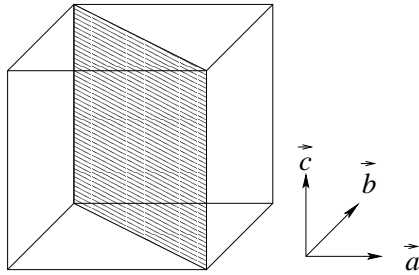


Abbildung 184. Ermittlung der Miller-Indizes für die gestrichelt gezeichnete Ebene in einem kubischen Kristall. Es ergibt sich $n_a = 1$, $n_b = 1$, $n_c = \infty$, also $1/n_a = 1$, $1/n_b = 1$, $1/n_c = 0$. Damit folgt für die Miller-Indizes (110)

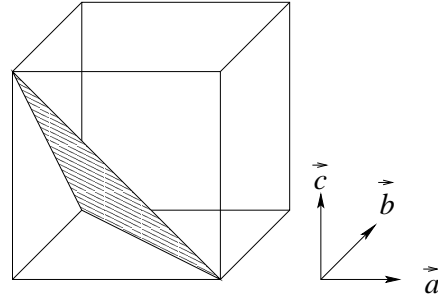


Abbildung 185. wie Abb. 184, jedoch ergibt sich hier $n_a = 1$, $n_b = 1$, $n_c = 1$, also $1/n_a = 1$, $1/n_b = 1$, $1/n_c = 1$. Damit folgt für die Miller-Indizes (111)

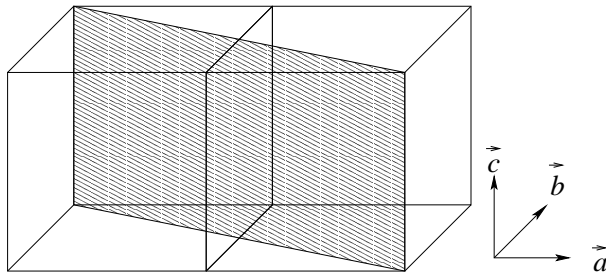


Abbildung 186. wie Abb. 184, jedoch ergibt sich hier $n_a = 2$, $n_b = 1$, $n_c = \infty$, also $1/n_a = 1/2$, $1/n_b = 1$, $1/n_c = 0$. Damit folgt für die Miller-Indizes (120)

22.5 Der Spalt

Auf einen **Spalt** (slit) der Breite b falle senkrecht paralleles Licht der Wellenlänge λ (s. Abb. 187).

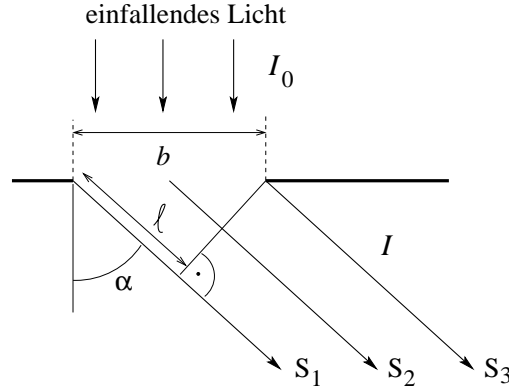


Abbildung 187. Fraunhofer-Beugung am Spalt. Die Pfeile unterhalb des Spaltes kennzeichnen das Licht, das von dem Spalt in die Richtung α abgestrahlt wird. I_0 und I sind die Intensitäten des einfallenden bzw. des gebeugten Lichtes

Die Interferenzen des hindurchgetretenen Lichtes sollen in einem großen Abstand vom Spalt oder, was gleichbedeutend damit ist, in der Brennebene einer hinter dem Spalt aufgestellten Sammellinse betrachtet werden. Dies bedeutet, dass man nur die Überlagerung *paralleler* Lichtstrahlen zu untersuchen hat (Fraunhofer-Beugung). Aus der Abb. 187 ergibt sich als Bedingung für die Auslöschung $\ell = \kappa\lambda$ mit $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ oder, wegen $\sin \alpha = \ell/b$,

$$\sin \alpha = \kappa \frac{\lambda}{b}. \quad (493)$$

Wir beweisen die Gl. (493) zunächst für $\kappa = 1$, d.h. $\ell = \lambda$. In diesem Fall zerlegen wir das Lichtbündel zwischen den Strahlen S_1 und S_3 (s. Abb. 187) in zwei gleich breite parallele Lichtbündel, die von den Strahlen S_1 und S_2 bzw. S_2 und S_3 begrenzt werden. Für jeden Strahl im ersten Lichtbündel findet man dann einen entsprechenden Strahl im zweiten Lichtbündel, der eine um $\ell/2$ längere Wegstrecke durchlaufen hat und sich mit diesem wegen $\ell/2 = \lambda/2$ auslöscht. Für $\kappa = 2$, d.h. $\ell = 2\lambda$, wird das Lichtbündel zwischen den Strahlen S_1 und S_3 in vier gleich breite parallele Lichtbündel zerlegt usw.

Ein Maximum der Helligkeit ergibt sich zunächst für $\alpha = 0$. Wenn aber α größer als null ist, muss die Bedingung

$$\sin \alpha = \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b} \quad (494)$$

mit $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ erfüllt sein, um maximale Helligkeit zu erhalten.

Die Gl.(494) lässt sich analog wie die Gl.(493) begründen. Als Beispiel betrachten wir den Fall $\kappa = 2$, d.h. $\sin \alpha = (3/2)\lambda/b$, wofür wir wegen $\ell = b \sin \alpha$ auch $\ell = (3/2)\lambda$ schreiben können. Das Lichtbündel zwischen den Strahlen S_1 und S_3 (s.Abb.187) wird dann in *drei* gleich breite parallele Lichtbündel zerlegt. Von diesen löschen sich zwei benachbarte aus, das dritte verursacht das Helligkeitsmaximum.

Ein Vergleich der Gln.(493) und (494) mit den entsprechenden Formeln für das Gitter (s. die Gln.(486) und (487), S.341) zeigt, dass die Bedingungen für Auslöschung bzw. maximale Helligkeit (bis auf den Fall $\alpha = 0$) gerade vertauscht sind. Die beiden Gln.(493) und (494) folgen auch aus der allgemeinen Beziehung für die Intensität I des Lichtes, das von dem Spalt in der Richtung α abgestrahlt wird. Dafür ergibt sich

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \pi \zeta}{\pi \zeta} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \zeta = \frac{b}{\lambda} \sin \alpha. \quad (495)$$

Zur Berechnung der Intensität I des Lichtes, das von dem Spalt in der Richtung α abgestrahlt wird, zerlegen wir das Lichtbündel zwischen den Strahlen S_1 und S_3 (s.Abb.187) in eine sehr große Anzahl (N) von gleich breiten parallelen Lichtbündeln und verwenden die Gl.(488), S.342, $I \propto \{\sin[N\pi(g/\lambda) \sin \alpha]\}^2 / \{\sin[\pi(g/\lambda) \sin \alpha]\}^2$. Mit $Ng = b$ folgt daraus $I \propto \{\sin[\pi(b/\lambda) \sin \alpha]\}^2 / \{\sin[\pi(b/\lambda)N^{-1} \sin \alpha]\}^2$. Da N eine sehr große Zahl sein soll, kann der Term $\sin[\pi(b/\lambda)N^{-1} \sin \alpha]$ durch $\pi(b/\lambda)N^{-1} \sin \alpha$ ersetzt werden und es ergibt sich $I \propto \{\sin[\pi(b/\lambda) \sin \alpha]\}^2 / \{\pi(b/\lambda) \sin \alpha\}^2$. Der Proportionalitätsfaktor schließlich folgt aus der Bedingung, dass I für $\alpha = 0$ gleich I_0 sein muss, womit die Gl.(495) bewiesen ist.

In der Abb.188 ist die relative Lichtintensität I/I_0 nach Gl.(495) als Funktion der Größe $\zeta = (b/\lambda) \sin \alpha$ dargestellt.

Ein Vergleich mit der Fraunhofer-Beugung am Gitter (s. Abb. 176 und 177, S.343) zeigt, dass beim Spalt die Helligkeitsmaxima viel breiter sind und dass ihre Intensität mit der Ordnung (bei $\zeta = 0$ liegt das Maximum 0. Ordnung, bei $\zeta = 1, 5$ das 1. Ordnung usw.) stark abnimmt. Die große Breite der Helligkeitsmaxima beim Spalt bedingt, dass eine Bestimmung der Wellenlänge aus Gl.(494) bzw. (495) nur relativ ungenau möglich ist. Man sagt, der Spalt besitzt ein geringes spektrales Auflösungsvermögen.

22.6 Auflösungsvermögen optischer Geräte

22.6.1 Spektrales Auflösungsvermögen

Wenn ein Spektralapparat zwei benachbarte Spektrallinien λ und $\lambda + \Delta\lambda$ annähernd gleicher Intensität gerade noch auflöst, d.h. zwei getrennte Helligkeitsmaxima lie-

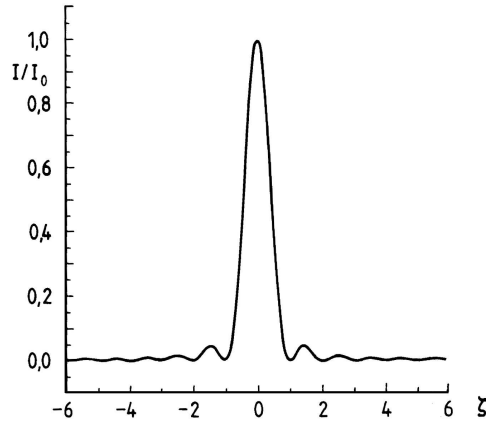


Abbildung 188. Relative Lichtintensität I/I_0 bei der Fraunhofer-Beugung an einem Spalt der Breite b als Funktion der Größe $\zeta = (b/\lambda) \sin \alpha$ (s. Abb. 187, S. 350)

fert, dann definiert man sein **spektrales Auflösungsvermögen** (spectral resolving power) durch den Quotienten

$$A_s = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|}. \quad (496)$$

Es gibt kein objektives Kriterium dafür, wann zwei durch Beugung verbreiterte Linien noch getrennt wahrnehmbar sind. Häufig wird aber das **Rayleigh-Kriterium** (Rayleigh criterion, Lord Rayleigh = John William Strutt 1842-1919) verwendet, wonach das Helligkeitsmaximum der einen Linie mit dem ersten Helligkeitsminimum der anderen Linie zusammenfallen muss.

(1) **Das optische Gitter** (diffraction grating). Für die Intensität des Lichtes, das unter dem Winkel α abgestrahlt wird, gilt (s. Gl. (488), S. 342)

$$I = I_0 \sin^2 \left[N\pi \frac{g}{\lambda} \sin \alpha \right] / \sin^2 \left[\pi \frac{g}{\lambda} \sin \alpha \right]. \quad (497)$$

Daraus folgt

$$A_s^{\text{Gi}} = \kappa N, \quad (498)$$

wobei κ die Ordnung des verwendeten Hauptmaximums (s. S. 342) und N die Anzahl der Spalte des Gitters bezeichnet.

Das κ -te Hauptmaximum für die Spektrallinie mit der Wellenlänge λ tritt auf, wenn der Nenner in Gl. (497) zum κ -ten Male verschwindet, d.h. für $\alpha = \alpha_k$ mit $\pi(g/\lambda) \sin \alpha_k = \kappa\pi$. Das Argument des Zählers von Gl. (497) wird an dieser Stelle gleich $N\kappa\pi$. Die 1. Nullstelle

nach diesem Maximum ($\alpha = \alpha_{\kappa,0} > \alpha_{\kappa}$) folgt aus der Bedingung, dass sich das Argument des Zählers um π vergrößert hat. Es muss also gelten $N\pi(g/\lambda) \sin \alpha_{\kappa,0} = (N\kappa + 1)\pi$ oder $\sin \alpha_{\kappa,0} = (\lambda/g)(\kappa + 1/N)$. Analog tritt das κ -te Hauptmaximum für die Spektrallinie mit der größeren Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ auf für $\alpha = \alpha'_{\kappa}$ mit $\pi[g/(\lambda + \Delta\lambda)] \sin \alpha'_{\kappa} = \kappa\pi$. Das Rayleigh-Kriterium zur Auflösung der beiden Spektrallinien ist dann erfüllt, wenn $\alpha'_{\kappa} \geq \alpha_{\kappa,0}$ gilt. Daraus folgt $\kappa(\lambda + \Delta\lambda)/g \geq (\lambda/g)(\kappa + 1/N)$ oder $\Delta\lambda \geq \lambda/(\kappa N)$, was gleichbedeutend mit der Gl.(498) ist.

Es ist bemerkenswert, dass das Auflösungsvermögen des optischen Gitters nicht von der Gitterkonstanten g , sondern, abgesehen von der Ordnung κ , nur von der Anzahl N der Spalte abhängt. Allerdings muss man, um dieses Auflösungsvermögen zu erreichen, das gesamte Gitter ausleuchten, da anderenfalls in Gl.(498) für N nur die Anzahl der beleuchteten Spalte einzusetzen ist. Abb.189 zeigt das Spektrum 1. Ordnung für ein Gitter (s.Abb.175, S.341, mit $b \ll g$, $N = 10$, $g = 5 \mu\text{m}$) und zwei Spektrallinien der Wellenlängen $\lambda \pm \Delta\lambda/2$ mit verschiedenen Verhältnissen $\Delta\lambda/\lambda$.

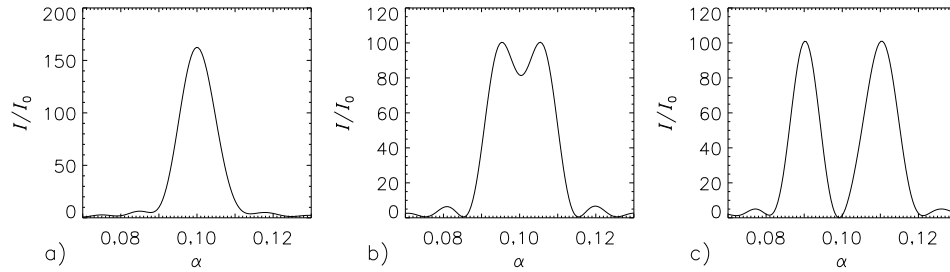


Abbildung 189. Berechnetes Spektrum 1. Ordnung für ein Gitter (s.Abb.175, S.341) mit $b \ll g$ sowie $N = 10$ Spalten und einer Gitterkonstanten $g = 5 \mu\text{m}$ als Funktion des Winkels α im Bogenmaß. Die Wellenlängen des einfallenden Lichtes sind $\lambda \pm \Delta\lambda/2$ mit $\lambda = 500 \text{ nm}$ und $\Delta\lambda/\lambda = 0,05$ (a), $0,1$ (b) und $0,2$ (c). Das Auflösungsvermögen dieses Gitters ist nach Gl.(498) gleich 10. Die beiden Linien im Beispiel b) gelten nach dem Rayleigh-Kriterium gerade als aufgelöst.

Für ein typisches optisches Gitter mit einer Gitterkonstanten $g = 1,5 \mu\text{m}$, das auf einer Breite von $0,01 \text{ m}$ ausgeleuchtet wird, ergibt sich ein spektrales Auflösungsvermögen im Spektrum 3. Ordnung von 20000. Das heißt, bei einer Wellenlänge λ von 600 nm kann man damit noch Spektrallinien trennen, deren Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ nur $0,03 \text{ nm}$ beträgt.

(2) **Das Fabry-Pérot-Interferometer** (Fabry Pérot interferometer, Charles Fabry 1867-1945, Alfred Pérot 1863-1925). Das in Abb.190 schematisch dargestell-

te Fabry-Pérot-Interferometer besteht aus zwei Glasplatten, deren Innenseiten geringfügig durchlässig verspiegelt sind (Reflexionsfaktor ca. 95% - 99%) und die einen exakt planparallelen Luftspalt der Dicke d begrenzen. Um störende Reflexe an den Außenseiten der beiden Glasplatten zu vermeiden, werden diese mit einer Antireflexionsschicht (s.S.374) versehen und so geschliffen, dass sie gegen die Innenseiten leicht geneigt sind. Auf diese Weise kommt es ausschließlich zur Interferenz der im Gebiet des Luftspaltes mehrfach reflektierten Wellen (s.Abb.190) und Licht wird nur hindurch gelassen, wenn die Bedingung

$$\kappa = \frac{2d \cos \alpha}{\lambda} \quad (499)$$

mit ganzzahligem κ erfüllt ist.

Diese Gleichung ergibt sich in ähnlicher Weise wie die Bragg-Beziehung auf S.346, nur dass ϑ in Gl.(492) durch $\alpha = (\pi/2) - \vartheta$ zu ersetzen ist.

Für einen vorgegebenen Wert von α wird monochromatisches Licht der Wellenlänge λ nur dann hindurch gelassen, wenn eine ganze Zahl κ existiert, die der Gl.(499) genügt. Wir nehmen an, dies sei der Fall. Nun vergrößern wir die Wellenlänge um die kleine Differenz $\Delta\lambda$. Dann wird dieses Licht gesperrt, bis $\Delta\lambda$ einen solchen Wert ($\Delta\lambda = \Delta\lambda_{\text{FSR}}$) erreicht hat, bei dem die Interferenzordnung den Wert $\kappa - 1 = (2d \cos \alpha)/(\lambda + \Delta\lambda_{\text{FSR}})$ besitzt. $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$ nennt man den **freien Spektralbereich** (free spectral range, FSR) des Fabry-Pérot-Interferometers. Für ihn ergibt sich

$$\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \frac{\lambda}{\kappa}. \quad (500)$$

Wir ersetzen in der Beziehung $\lambda + \Delta\lambda_{\text{FSR}} = (2d \cos \alpha)/(\kappa - 1)$ die Größe $2d \cos \alpha$ entsprechend Gl.(499) durch $\kappa \cdot \lambda$ und erhalten $\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \kappa \cdot \lambda / (\kappa - 1) - \lambda = \lambda / (\kappa - 1) \approx \lambda / \kappa$, da die Interferenzordnung κ gewöhnlich sehr groß gegen 1 ist (typische Werte sind $\kappa = 5 \cdot 10^4 \dots 10^6$). In Frequenzen ausgedrückt ergibt sich für den freien Spektralbereich $\Delta f_{\text{FSR}} = c / (2d \cos \alpha)$

Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, muss also die spektrale Breite des auf das Fabry-Pérot-Interferometer einfallenden Lichtes auf einen Wert kleiner als $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$ verringert werden. Dies lässt sich z.B. durch Vorschalten eines optischen Gitters erreichen. Die Halbwertsbreite $\Delta\lambda_{1/2}$ für monochromatisches Licht, dessen Wellenlänge in den freien Spektralbereich $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$ fällt, ergibt sich zu

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{(1 - R)}{\pi\sqrt{R}} \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right), \quad (501)$$

wobei R der **Schwächungsfaktor** (attenuation coefficient) ist, um den sich die Amplitude der elektromagnetischen Welle nach je einer Reflexion an der unteren und der oberen Glasplatte (s.Abb.191) reduziert.

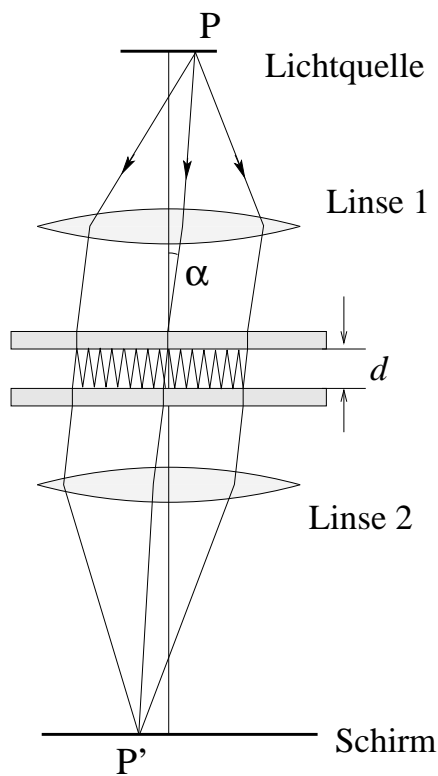
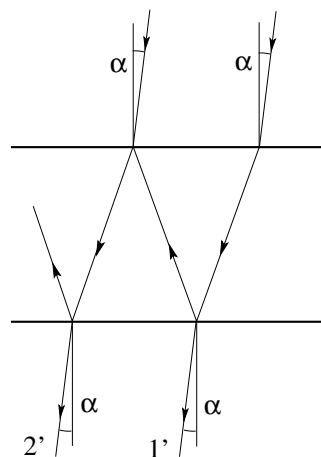


Abbildung 190. Zur Entstehung des Ringsystems bei einem Fabry-Pérot-Interferometer. Die Punkte P der flächenhaften monochromatischen Lichtquelle, die sich in der vorderen Brennebene der Sammellinse 1 befinden, liefern paralleles Licht, das von oben unter dem Winkel $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ auf das Interferometer fällt. Dieses Licht wird zwischen den geringfügig durchlässig verspiegelten Innenseiten der beiden Glasplatten mehrfach reflektiert (s. Abb. 191). Die durch die untere Glasplatte hindurch tretenden Lichtstrahlen interferieren nach Gl. (499) und es entsteht wegen der Rotationssymmetrie der Anordnung in der hinteren Brennebene der Linse 2 (Schirm) ein Ringsystem, wobei die Interferenzordnung κ vom innersten Ring nach außen abnimmt. Dieses Ringsystem spaltet auf, wenn das einfallende Licht aus Spektrallinien unterschiedlicher Wellenlänge besteht. Aus der Größe der Aufspaltung ergibt sich der Wellenlängenunterschied

Abbildung 191. Der Strahlengang zwischen den geringfügig durchlässig verspiegelten Innenseiten der beiden Glasplatten des Fabry-Pérot-Interferometers



Für die resultierende elektrische Feldstärke $E(t)$ bei der Überlagerung der N Wellen ($N \rightarrow \infty$), die aus der unteren Glasplatte in Abb.190 austreten, gilt $E(t) = \sum \hat{E} R^n \cos(\omega t + n\phi)$, wobei die Summation von $n = 0$ bis $n = N - 1$ zu erstrecken ist. ϕ bezeichnet die Phasenverschiebung zwischen zwei benachbarten Wellen, z.B. 2' und 1' in Abb.191 und R die Reduzierung der Amplitude durch die zwei zusätzlichen Reflexionen, die der Strahl 2' erfahren hat. R wird Schwächungsfaktor genannt. Bis auf den Faktor R^n ist dies die gleiche Beziehung wie bei der Behandlung der Fraunhofer-Beugung am optischen Gitter (s.S.342). Zur Berechnung der Summe verwenden wir die Euler'sche Formel $\exp(i\beta) = \cos \beta + i \sin \beta$, d.h., wir schreiben $E(t) = \operatorname{Re}\{\hat{E} \sum R^n \exp(i\omega t + in\phi)\} = \operatorname{Re}\{\hat{E} \exp(i\omega t) \sum [R \exp(i\phi)]^n\}$. Wegen $\sum q^n = (q^N - 1)/(q - 1)$ (s.S.342) folgt $E(t) = \operatorname{Re}\{\hat{E} \exp(i\omega t) [R^N \exp(i\phi N) - 1] [R \exp(i\phi) - 1]^{-1}\}$. Mit $R^N \rightarrow 0$ ergibt sich für die Amplitude von $E(t)$ der Ausdruck $|\hat{E} [R \exp(i\phi) - 1]^{-1}|$. Da die Intensität I proportional zum Quadrat dieser Größe ist, folgt $I \propto [(R \cos \phi - 1)^2 + R^2 \sin^2 \phi]^{-1}$ oder schließlich $I = I_0 [R^2 - 2R \cos \phi + 1]^{-1}$ (**Airy-Formel**, George Biddell Airy 1801-1892). Mit $\cos \phi = 1 - 2 \sin^2(\phi/2)$ läßt sich die Airy-Formel umschreiben zu $I = I_0 (1 - R)^{-2} [1 + F \sin^2(\phi/2)]^{-1}$ mit dem Finesse-Koeffizienten $F = 4R(1 - R)^{-2}$. Die Intensität I besitzt als Funktion von ϕ Maxima, und zwar ergibt sich $I_{\max} = I_0 (1 - R)^{-2}$ für $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ Zur Berechnung der Halbwertsbreite $\phi_{1/2}$ (full width at half maximum) dieser Maxima betrachten wir das Maximum bei $\phi = 0$. Dann muss gelten $F \sin^2(\phi_{1/2}/4) = 1$. Mit $|\phi_{1/2}| \ll 1$ folgt $\phi_{1/2} = 4/\sqrt{F} = 2(1 - R)/\sqrt{R}$. Da sich zwei benachbarte Maxima um $\Delta\phi = 2\pi$ unterscheiden und da wir ihre Wellenlängendifferenz mit Δf_{FSR} bezeichnet haben (s.Gl.(500)), ergibt sich für die Halbwertsbreite $\Delta\lambda_{1/2} = 2(1 - R)/\sqrt{R}(2\pi)^{-1} \Delta\lambda_{\text{FSR}}$, was unter Verwendung von $\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \lambda/\kappa$ identisch mit der gesuchten Gl.(501) ist.

Für das spektrale Auflösungsvermögen (s.Gl.(496), S.352) des Fabry-Pérot-Interferometers folgt aus Gl.(501)

$$A_s^{\text{FP}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1 - R)} \kappa. \quad (502)$$

Das Rayleigh-Kriterium zur Auflösung der Spektrallinien bei λ und $\lambda + \Delta\lambda$ ist erfüllt, wenn der Abstand der Beugungsmaxima der Linien (mindestens) eine Halbwertsbreite ist. Für die Beugungsringe des Fabry-Pérot-Interferometers bedeutet dies $\Delta\lambda = \Delta\lambda_{1/2}$, d.h. $A_s^{\text{FP}} = \lambda/\Delta\lambda_{1/2}$. Unter Verwendung von Gl.(501) ergibt sich dann die gesuchte Gl.(502).

Das spektrale Auflösungsvermögen A_s^{FP} von Fabry-Pérot-Interferometern kann Werte bis zu 10^{11} erreichen.

Da der Brechungsindex n von Luft nahezu gleich eins ist (s.Tab.65, S.307), kann man in Gl.(499), S.354, und den daraus abgeleiteten Beziehungen die Wellenlänge $\lambda = \lambda_0/n$ näherungsweise durch die Vakuumwellenlänge λ_0 ersetzen. Wenn man aber den Luftspalt

zwischen den beiden Glasplatten mit einer Substanz ausfüllt, deren Brechungsindex n merklich größer als eins ist, muss man Gl.(499) in der Form $2nd \cos \alpha = \kappa \lambda_0$ schreiben. Diese Beziehung führt möglicherweise zu einer interessanten technischen Entwicklung. Der Brechungsindex n lässt sich nämlich bei geeigneten Substanzen durch eine Bestrahlung mit Laserlicht nahezu trägheitslos ändern (s.S.299), so dass man auf diese Weise die Intensität eines Lichtstrahls mit einer Schnelligkeit schalten kann, wie sie für Hochleistungscomputer benötigt wird.

Bei der **Lummer-Gehrcke-Platte** (Otto Lummer 1860-1925, Ernst Gehrcke 1878-1960) wird an Stelle der zwei Glasplatten *eine* planparallele Glasplatte verwendet (s.Abb.192). Im Gegensatz zum Fabry-Pérot-Interferometer brauchen die beiden Flächen der Glasplatte nicht verspiegelt zu werden, da man den inneren Reflexionswinkel nahezu gleich dem kritischen Winkel der Totalreflexion (s.S.308) machen kann, so dass der Schwächungsfaktor R nur wenig unter 100% liegt. Allerdings kann man wegen der endlichen Plattenlänge nur eine begrenzte Anzahl (N im klein gedruckten Text auf S.356 ist endlich) von Wellen zur Interferenz bringen. Damit ist das erreichbare spektrale Auflösungsvermögen kleiner als A_s^{FP} nach Gl.(502).

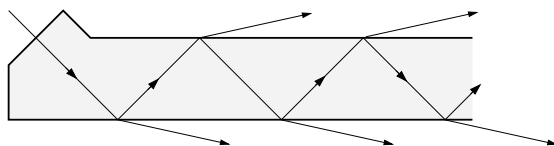


Abbildung 192. Lummer-Gehrcke-Platte. Wenn der innere Reflexionswinkel nahezu gleich dem kritischen Winkel der Totalreflexion (s.S.308) gewählt wird, erreicht man auch ohne Verspiegelung der Oberflächen einen Schwächungsfaktor R , der nur wenig unter 100% liegt

(3) **Das Prisma** (prism). Der Einfachheit halber betrachten wir den symmetrischen Durchgang durch ein gleichseitiges Prisma, dessen Seitenlänge a sei (s. Abb.193).

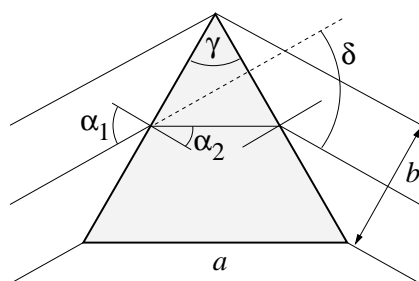


Abbildung 193. Symmetrischer Durchgang von Licht durch ein gleichseitiges Prisma ($\gamma = \pi/3$). b bezeichnet die Breite des parallelen Lichtbündels. Da die Winkelsumme im Dreieck gleich π sein muss, gilt $\alpha_2 = \pi/6$

Unter Verwendung der Gl.(451), S.310, für den Ablenkungswinkel δ und der Bedingung für das Auftreten der ersten Nullstelle bei einem Spalt der Breite b (Gl.(493), S.350) folgt für das spektrale Auflösungsvermögen des Prismas

$$A_s^P = a \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|. \quad (503)$$

Wir berechnen zunächst die Abhängigkeit des Ablenkungswinkels δ von der Wellenlänge λ des Lichtes. Durch Differentiation nach λ erhält man aus der Beziehung $\sin[(\gamma + \delta)/2] = n \sin(\gamma/2)$ (s.Gl.(451), S.310) den Ausdruck $(1/2) \cos[(\gamma + \delta)/2] d\delta/d\lambda = \sin(\gamma/2) dn/d\lambda$ oder $d\delta/d\lambda = [2 \sin(\gamma/2)] [\cos[(\gamma + \delta)/2]]^{-1} dn/d\lambda$. Wegen $\cos[(\gamma + \delta)/2] = \{1 - \sin^2[(\gamma + \delta)/2]\}^{1/2} = [1 - n^2 \sin^2(\gamma/2)]^{1/2}$ und $\gamma = \pi/3$ (gleichseitiges Dreieck, d.h. $\sin \gamma/2 = 1/2$) lässt sich diese Beziehung vereinfachen zu $d\delta/d\lambda = (1 - n^2/4)^{-1/2} dn/d\lambda$. Das zum Ablenkungswinkel δ gehörige Signal (Maximum nullter Ordnung in der Sprache der Wellenoptik) besitzt eine bestimmte Breite $\Delta\delta$, die wir durch den halben Wert des Abstands zwischen den ersten Nullstellen rechts und links vom Maximum definieren. Nach Gl.(493), S.350, muss also gelten $b \sin(\Delta\delta) = \lambda$. Wegen $\Delta\delta \ll 1$ können wir dafür schreiben $\Delta\delta = \lambda/b$. Mit $b = a \cos \alpha_1$ (s.Abb.193) und $\cos \alpha_1 = (1 - \sin^2 \alpha_1)^{1/2} = (1 - n^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2}$ sowie $\alpha_2 = \pi/6$ (s.Abb.193) folgt $\Delta\delta = (\lambda/a)(1 - n^2/4)^{-1/2}$. Ersetzen wir nun in der Gleichung $\Delta\delta = |d\delta/d\lambda| \Delta\lambda$ (die Betragstriche sind erforderlich, da $\Delta\delta$ eine positive Größe sein muss) $\Delta\delta$ durch $(\lambda/a)(1 - n^2/4)^{-1/2}$ und $|d\delta/d\lambda|$ mit Hilfe der oben abgeleiteten Beziehung $d\delta/d\lambda = (1 - n^2/4)^{-1/2} dn/d\lambda$, so ergibt sich $\lambda/a = |dn/d\lambda| \Delta\lambda$ oder $\lambda/\Delta\lambda = a |dn/d\lambda|$.

Die Ableitung $dn/d\lambda$ kann in guter Näherung durch den Quotienten $(n_F - n_C)/(\lambda_F - \lambda_C)$ ersetzt werden. Einige Zahlenwerte sind in der Tab.71 enthalten.

Tabelle 71. Mittlere Dispersion $(n_F - n_C)$ [LID90], [KOH96] und die daraus mit $\lambda_F = 486,1$ nm und $\lambda_C = 656,3$ nm (s.S.312) berechneten Quotienten $(n_F - n_C)/(\lambda_F - \lambda_C)$ für einige Stoffe bei Zimmertemperatur

Stoff	$n_F - n_C$	$(n_F - n_C)/(\lambda_F - \lambda_C)$ $\approx dn/d\lambda$
Wasser (H ₂ O, water)	0,0060	$-3,53 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$
leichtes Kronglas (zinc crown glass)	0,009	$-5,29 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$
Schwefelkohlenstoff (CS ₂ , carbon disulphide)	0,0344	$-20,2 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$
schwerstes Flintglas (heaviest flint glass)	0,040	$-23,5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$

Für ein gleichseitiges Prisma mit einer Kantenlänge $a = 0,1$ m, das mit Wasser bzw. Schwefelkohlenstoff gefüllt ist, ergibt sich also ein spektrales Auflösungsvermögen A_s^P von ca. 350 bzw. 2000. Um die beiden Quecksilberlinien, die bei $\lambda_1 = 576,960$ nm bzw.

$\lambda_2 = 579,066$ nm auftreten [LID90], aufzulösen, muss das spektrale Auflösungsvermögen $0,5(\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ also mindestens gleich 274 sein. Es genügt damit schon das mit Wasser gefüllte Prisma.

Ü 143

22.6.2 Räumliches Auflösungsvermögen

Die Beugung einer monochromatischen ebenen Welle, die senkrecht auf einen Schirm mit einer kreisförmigen Öffnung fällt, führt zu einer Verteilung der Intensität des Lichtes hinter dem Schirm, die rotationssymmetrisch um die Symmetrieachse ist und die damit nur vom Winkel ϑ bezüglich dieser Achse abhängt. Eine etwas aufwendigere Rechnung [KLE88] zeigt, dass die erste Nullstelle auftritt, wenn ϑ den durch

$$\sin \vartheta_0 = \frac{1,22\lambda}{2R} \quad (504)$$

bestimmten Wert ϑ_0 annimmt, wobei R den Radius der Öffnung bezeichnet. Diese Gleichung steht an Stelle der entsprechenden Bedingung $\sin \alpha = \lambda/b$ (s.Gl.(493), S.350) für die Beugung an einem Spalt der Breite b . Eine Sammellinse, deren Durchmesser $2R$ und deren Brennweite f sei, erzeugt also von achsenparallel einfallendem Licht an der Stelle des Brennpunktes ein Beugungsscheibchen mit dem Durchmesser $2f\vartheta_0$. Deshalb führt paralleles Licht, das unter dem Winkel δ gegenüber der optischen Achse einfällt, nur dann zu einem getrennten Beugungsscheibchen, wenn δ größer ist als ϑ_0 (**Rayleigh-Kriterium**, Rayleigh criterion, Lord Rayleigh = John William Strutt 1842-1919). Wegen $R \gg \lambda$ kann man in Gl.(504) $\sin \vartheta_0$ durch ϑ_0 ersetzen, so dass sich für den kleinsten messbaren Winkel

$$\delta_{\min} = \vartheta_0 = \frac{1,22\lambda}{2R} \quad (505)$$

ergibt. Als Anwendung von Gl.(505) wollen wir das **räumliche Auflösungsvermögen** (spatial resolving power) des menschlichen Auges sowie die sinnvolle **Maximalvergrößerung** (maximum magnification) von astronomischen Fernrohren und von Mikroskopen berechnen.

Der Durchmesser $2R$ der Pupille des *menschlichen Auges* liegt je nach Helligkeit zwischen ca. 1 mm und 8 mm. Für $2R = 2$ mm und Licht der Wellenlänge 500 nm, die im Glaskörper des Auges ($n = 1,336$, s.S.329) auf ca. 370 nm reduziert wird, ergibt sich also aus Gl.(505) für δ_{\min} im Bogenmaß ein Wert von ungefähr $2,3 \cdot 10^{-4}$, was ca. 1 Bogenminute ($\pi/(180 \cdot 60)$ rad, s.S.329) entspricht.

Für ein *astronomisches Fernrohr* mit einem Objektivdurchmesser $2R$ und Licht der Wellenlänge 500 nm beträgt der minimal messbare Winkel im Bogenmaß nach Gl.(505) ca. $6 \cdot 10^{-7}/(2R/\text{m})$. Ein Vergleich mit dem durch das Auge minimal noch

registrierbaren Winkel von $2,3 \cdot 10^{-4}$ zeigt also, dass es keinen Gewinn bringt, die Vergrößerung des Fernrohrs über den Wert $2,3 \cdot 10^{-4} \cdot [6 \cdot 10^{-7} / (2R/m)]^{-1} \approx 400(2R/m)$ (sinnvolle Maximalvergrößerung) hinaus zu erhöhen.

Der mit einem *Mikroskop* minimal messbare Abstand Δx_{\min} zweier Objektpunkte P_1 und P_2 ergibt sich zu

$$\Delta x_{\min} = 0,61 \frac{\lambda}{\tan \alpha_0} \quad (506)$$

mit $\tan \alpha_0 = R/f$. Der doppelte Wert dieser Größe, also $2R/f$, wird als **relative Öffnung** (relative aperture), ihr Kehrwert - vor allem bei Photoapparaten - als **Blendenzahl** (focal ratio) des Objektivs bezeichnet.

Auf Grund von Gl.(504) mit $\sin \vartheta_0 \approx \vartheta_0$ erzeugt das Objektiv in Abb.194 von dem Punkt P_1 ein Beugungsscheibchen P'_1 mit dem Durchmesser $2b(1, 22\lambda/2R)$. Das Gleiche gilt für den Punkt P_2 . Damit P'_1 und P'_2 getrennt beobachtbar sind, muss ihr Abstand $\Delta x'$ mindestens gleich dem Radius der Beugungsscheibchen sein, also $\Delta x'_{\min} = b(1, 22\lambda/2R)$. Wegen $\Delta x'/\Delta x = b/g$ (s.Gl.(468), S.319) und $g \approx f$ ergibt sich $\Delta x_{\min} = f(1, 22\lambda/2R)$, woraus mit $R/f = \tan \alpha_0$ die gesuchte Gl.(506) folgt.

Gemäß Abb.194 bestimmt der Durchmesser des Objektivs die kleinste messbare Länge und, wie man sich leicht überlegen kann (Poynting-Vektor), auch die Helligkeit des Bildes. Durch Anbringen einer Blende verkleinert sich die relative Öffnung und das Auflösungsvermögen sowie die Helligkeit verringern sich. Man bezeichnet den begrenzenden Querschnitt für den Lichtstrom auf der Objektseite als **Eintrittspupille** (entrance pupil) und auf der Bildseite als **Austrittspupille** (exit pupil). In Abb.194 ist demzufolge der Linsenquerschnitt die gemeinsame Eintritts- und Austrittspupille. Eine zweite Gleichung für Δx_{\min} erhält man relativ leicht durch Verwendung des **Abbe'schen Satzes** (Abbe's rule, nach Ernst Abbe 1840-1905, der sich ein Leben lang gegen die Schreibweise Abbé gewehrt hat):

Um einen leuchtenden Gegenstand (z.B. einen Spalt) abzubilden, muss das optische Instrument außer den Strahlen für das Beugungsmaximum nullter Ordnung mindestens auch die für die erste Nullstelle des Beugungsbildes mit übertragen.

Zur Abbildung eines nichtleuchtenden Gegenstandes (z.B. eines dünnen Fadens) müssen neben den Strahlen für die Nullstelle nullter Ordnung auch diejenigen Strahlen übertragen werden, die das erste Beugungsmaximum erzeugen. Diese Ergänzung zum Abbe'schen Satz folgt unmittelbar aus dem **Babinet-Prinzip** (Babinet principle, Jacques Babinet 1794-1872), wonach die Beugungsbilder eines leuchtenden und des entsprechenden nichtleuchtenden Gegenstandes (z.B. Spalt und Faden gleicher Geometrie) zueinander komplementär sind. Das heißt, ihre Überlagerung muss im gesamten Raum einer ungestörten Ausbreitung der erregenden elektromagnetischen Welle entsprechen.

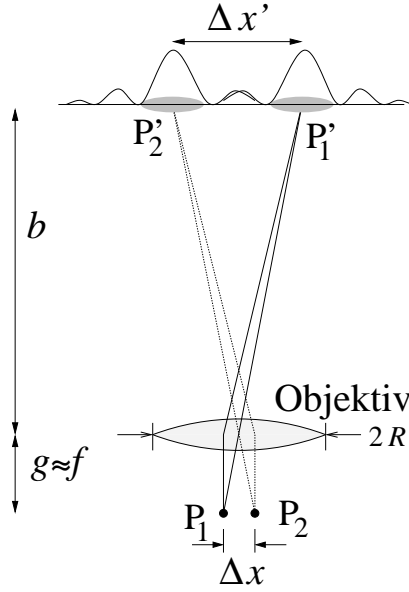


Abbildung 194. Zum Auflösungsvermögen eines Mikroskops, dessen Objektiv den Durchmesser $2R$ und die Brennweite f hat. Nach dem Rayleigh-Kriterium gelten die beiden Punkte P_1 und P_2 gerade noch als aufgelöst, wenn das Maximum des Beugungsscheibchens P_1' am Ort der ersten Nullstelle des Beugungsscheibchens P_2' liegt. Im dargestellten Bild sind die Punkte klar aufgelöst.

Wir betrachten die Abbildung eines Spaltes durch das gleiche Mikroskop wie in Abb.194. Die Spaltbreite sei Δx und α_0 der vom Objektiv erfasste maximale Öffnungswinkel (s.Abb.195). Damit die erste Nullstelle des gebeugten Lichtes noch übertragen wird, muss nach Gl.(493), S.350, $\sin \alpha_0 \geq \lambda/\Delta x$ gelten, so dass man nach dem Abbe'schen Satz für die minimal sichtbare Spaltbreite die Beziehung

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha_0} \quad (507)$$

erhält. Für praktische Fälle stimmt diese Gleichung bis auf einen Faktor von der Größenordnung eins mit der Gl.(506) überein. Die Wellenlänge λ in Gl.(507) ist die Wellenlänge des Lichts in Luft, die in sehr guter Näherung mit der Vakuumwellenlänge λ_0 übereinstimmt (s.Tab.65, S.307).

Wenn aber das Volumen zwischen Objekt (Spalt) und Objektiv mit einer Flüssigkeit (**Immersionsflüssigkeit**, immersion liquid) ausgefüllt wird, deren Brechungsindex n sei, dann verringert sich die Wellenlänge auf den Wert λ_0/n (s.Gl.(449), S.307) und x_{\min} reduziert sich auf

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda_0}{n \sin \alpha_0}. \quad (508)$$

Die Größe $n \sin \alpha_0$ heißt **numerische Apertur** (numerical aperture) des Mikroskops. Ein Beispiel möge die Bedeutung der Immersion erläutern. Bei einem Trockensystem, d.h. $n = 1$, gelangt das Licht nicht, wie in Abb.195 dargestellt, geradlinig

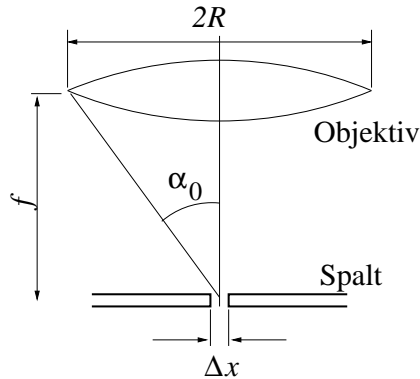


Abbildung 195. Zur Ableitung des Auflösungsvermögens eines Mikroskops unter Verwendung des Abbe'schen Satzes

zum Objektiv, sondern wird durch die Brechung an dem Glasplättchen, das man meist zur Abdeckung des Objektes, d.h. hier des Spaltes, verwendet, nach außen abgelenkt (dieses "Deckglas" wurde in Abb.195 nicht mit eingezeichnet). Deshalb hat man in Gl.(508) an Stelle von α_0 , das z.B. gleich 70° sei, einen kleineren Wert einzusetzen, beispielsweise 40° . Für $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ folgt dann $\Delta x_{\min} \approx 800 \text{ nm}$. Bei Verwendung von Zedernholzöl als Immersionsflüssigkeit mit $n = 1,51$ wird α_0 erreicht und aus Gl.(508) ergibt sich $\Delta x_{\min} \approx 350 \text{ nm}$. Wenn diese Strecke auf eine Länge vergrößert wird, die mit dem Auge gut sichtbar ist, z.B. $0,3 - 0,4 \text{ mm}$, dann besitzt das Mikroskop die sinnvolle Maximalvergrößerung v_{\max} .

Im vorliegenden Beispiel, das als typisch für ein modernes Immersionssystem angesehen werden kann, ergibt sich $v_{\max} \approx 1000$. Das Attribut "sinnvoll" ist dabei wesentlich, da man ja im Prinzip die Vergrößerung beliebig erhöhen kann, indem man z.B. die Brennweiten des Objektivs und des Okulars (s.Gl.(475), S.324) verringert oder eine elektronische Nachvergrößerung (TV-Kamera mit TV-Bildschirm) verwendet. Eine solche Vergrößerung $v > v_{\max}$ liefert aber keine weiteren Informationen über das Objekt. Man spricht von einer **optisch leeren Vergrößerung**, da lediglich die Beugungsscheibchen größer dargestellt werden. Die Situation ist ähnlich wie bei dem Versuch, in einem Photo, das z.B. in einer Tageszeitung mit entsprechend großen Rasterpunkten abgedruckt ist, feinere Einzelheiten durch Verwendung einer Lupe oder gar eines Mikroskops erkennen zu wollen. Der einzige Weg, den minimal messbaren Abstand Δx_{\min} zu verringern und damit die sinnvolle Maximalvergrößerung entsprechend zu erhöhen, besteht darin, die Wellenlänge λ der verwendeten Strahlung zu verkleinern. Dies bedeutet zunächst den Übergang vom Licht- zum **Ultraviolett-mikroskop** (ultraviolet microscope), bei dem, wegen der starken Absorption des ultravioletten Lichtes im Glas, als Linsenmaterial Quarz verwendet werden muss. Der weitere Schritt zum Röntgenmikroskop ist aber auf diese Weise nicht möglich (s. jedoch S.366), da hierfür kein geeignetes Linsenmaterial existiert. Deshalb verwendet man Elektronenstrahlen, die sich sowohl elektrisch

als auch magnetisch leicht ablenken lassen und deren Wellenlänge (s.Abschn.26.2, S.432) durch die Beschleunigungsspannung hinreichend klein gemacht werden kann (Elektronenmikroskop, s.S.433). Ü 144

22.7 Das Huygens-Prinzip

Das **Huygens-Prinzip** (Huygens principle, Christiaan Huygens 1629-1695) besagt, dass

*jeder Punkt, der von einer Welle getroffen wird, Ausgangspunkt einer Kugelwelle ist und dass die Überlagerung dieser **sekundären Wellen** (secondary waves) das resultierende Wellenfeld ergibt.*

Das Verdienst von Fresnel (Jean Augustin Fresnel 1788-1827) und Young (Thomas Young 1773-1829) besteht darin, dass sie auf die Bedeutung der Phasendifferenzen bei dieser Überlagerung hingewiesen haben, weshalb man eigentlich vom Huygens-Fresnel-Young-Prinzip sprechen sollte. Dieses Prinzip lässt sich qualitativ auf tiefer liegende physikalische Gesetze, und zwar in der Optik auf die Maxwell-Gleichungen, zurückführen. Es hat sich bei der Erklärung vieler Phänomene hervorragend bewährt. Die Abb.196 zeigt schematisch die Ausbreitung einer ebenen Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet. Zum Zeitpunkt t_0 habe die von unten kommende Welle die Ebene $z = 0$ erreicht. Von den unendlich vielen Punkten in dieser Ebene wurden nur drei ausgewählt und die von ihnen erzeugten sekundären Wellen zum Zeitpunkt $t > t_0$ dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber sind aber die Teile in der unteren Halbebene ($z < 0$) nicht mit gezeichnet. Im Einzelnen kann man sich überlegen, dass die Überlagerung der sekundären Kugelwellen eine ebene Wellenfront an der Stelle $z = c(t - t_0)$ ergibt, wobei c die Phasengeschwindigkeit der Wellen bezeichnet.

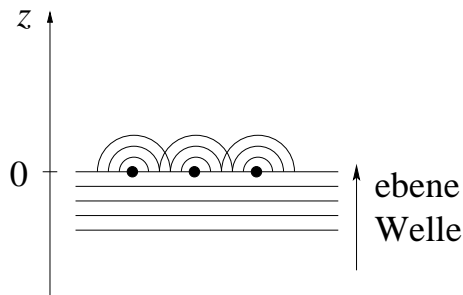


Abbildung 196. Zur Erklärung der Ausbreitung einer ebenen Welle durch das Huygens-Prinzip

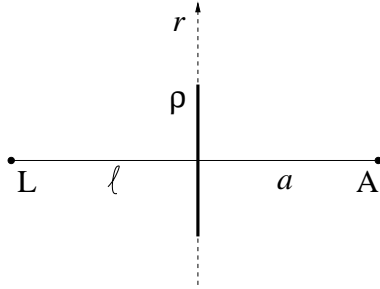


Abbildung 197. Zwischen einer punktförmigen Lichtquelle L und dem Auge A befindet sich, konzentrisch angeordnet, ein kreisförmiger Schirm mit dem Radius ρ . Die von den Punkten in der gestrichelt gezeichneten Ebene ($r > \rho$) ausgehenden Kugelwellen können durchaus A treffen, so dass A die Lichtquelle sehen müsste

In ähnlicher Weise lassen sich das Reflexions- (s.S.301) und das Brechungsgesetz (s.S.306) begründen. Auch die Argumentation bei der Ableitung der Formeln für die Beugung am Gitter (s.S.341) oder am Spalt (s.S.350) basiert auf dem Huygens-Prinzip. Es ergibt sich aber nun folgendes Problem: Wenn man zwischen eine punktförmige Lichtquelle L und das Auge A einen konzentrischen kreisförmigen Schirm mit dem Radius ρ bringt (s.Abb.197), dann gelangt, wie man aus Erfahrung weiß, kein Licht nach A. Die nach dem Huygens-Prinzip von allen Punkten in der gestrichelt gezeichneten Ebene ($r > \rho$) ausgehenden Kugelwellen können aber auf das Auge treffen, das damit die Lichtquelle sehen müsste. Der Widerspruch löst sich, wenn man annimmt, dass die Überlagerung aller dieser Kugelwellen an der Stelle A zur Auslöschung führt. Um dies quantitativ zu erfassen, entfernen wir den Schirm und teilen die gesamte Ebene (d.h. $0 \leq r \leq \infty$) an dieser Stelle in einen inneren Kreis und konzentrische Kreisscheiben ein. Ihre Größe wählen wir so, dass der Gangunterschied für den Weg von L nach A über den jeweils äußeren Radius gegenüber dem direkten Weg, der die Länge $\ell + a$ besitzt, gleich $\kappa\lambda/2$ ist, mit $\kappa = 1$ für den inneren Kreis und $\kappa = 2, 3, 4, \dots$ für die folgenden Kreisscheiben (s.Abb.198).

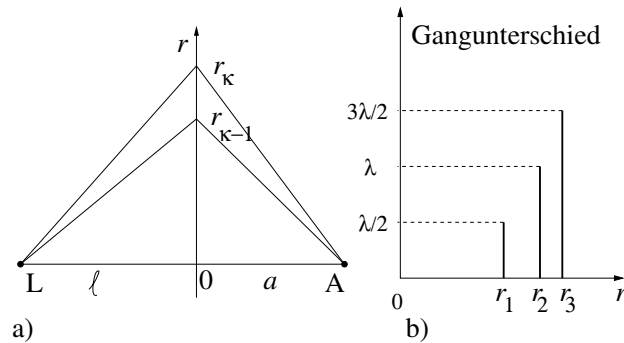


Abbildung 198. Die Fresnel-Zonen. a) Die κ -te Fresnel-Zone erstreckt sich von $r_{\kappa-1}$ bis r_{κ} (mit $\kappa = 1, 2, 3$). Der Radius r_{κ} wird durch die Gl.(509) gegeben mit $r_0 = 0$. b) Gangunterschied für den Weg von L nach A über r_{κ} gegenüber der Strecke $\ell + a$

Man bezeichnet den inneren Kreis als 1. Fresnel-Zone und die folgenden Kreisscheiben entsprechend als 2., 3., 4., ... **Fresnel-Zone** (Fresnel zone). Der äußere Radius r_κ der κ -ten Fresnel-Zone ergibt sich für nicht zu große Werte von κ aus der Beziehung

$$r_\kappa = \left[\kappa \lambda \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{a} \right)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (509)$$

Dies bedeutet, dass alle Fresnel-Zonen die gleiche Fläche besitzen.

Aus Abb.198a folgt die Bedingung $(\ell^2 + r_\kappa^2)^{1/2} + (a^2 + r_\kappa^2)^{1/2} - (\ell + a) = \kappa \lambda / 2$. Unter der Voraussetzung $r_\kappa \ll \ell, a$ (bei großen Werten von κ ergibt sich für r_κ praktisch ein Kontinuum) vereinfacht sich diese Gleichung zu $\ell[1 + 1/2(r_\kappa/\ell)^2] + a[1 + 1/2(r_\kappa/a)^2] - \ell - a = \kappa \lambda / 2$ oder $r_\kappa = [\kappa \lambda (1/\ell + 1/a)^{-1}]^{1/2}$. Da die Fläche A_κ der κ -ten Fresnel-Zone gleich $\pi r_\kappa^2 - \pi r_{\kappa-1}^2$ ist (dies gilt auch für $\kappa = 1$, sofern man r_0 gleich null setzt), folgt $A_\kappa = \pi \lambda (1/\ell + 1/a)^{-1}$ oder $A_\kappa = \text{const.}$

Wenn man zwischen L und A einen unendlich ausgedehnten Schirm setzt, der eine konzentrische kreisförmige Öffnung mit dem Radius R besitzt, man nennt dies eine **Blende** (diaphragm), dann sollte das Auge für $R = r_1$ maximale Helligkeit und für $R = r_2$ Dunkelheit registrieren, da im letzteren Fall zu jeder Kugelwelle, die aus der 1. Fresnel-Zone stammt, eine entsprechende Kugelwelle mit der Phasenverschiebung $\lambda/2$ aus der 2. Fresnel-Zone nach A gelangt. Mit wachsendem Radius der Blende wiederholt sich dieser Wechsel von Helligkeit und Dunkelheit periodisch, was man auch experimentell relativ leicht zeigen kann. Die Integration über alle Kugelwellen liefert für die Lichtintensität an der Stelle A unter der schon bei der Ableitung von Gl.(509) gemachten Voraussetzung $r_\kappa \ll \ell, a$ die Beziehung (s. z.B. [JOO45])

$$I = 4I_0 \sin^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{R^2}{\lambda} \right) \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{a} \right) \right], \quad (510)$$

wobei I_0 die Lichtintensität ohne Blende ist. In Übereinstimmung mit dem oben Gesagten liefert Gl.(510) eine periodische Abhängigkeit der Lichtintensität I von R .

Das 1. Maximum tritt auf, wenn die eckige Klammer in Gl.(510) den Wert $\pi/2$ annimmt, d.h. für $R = [\lambda(1/\ell + 1/a)^{-1}]^{1/2}$ oder $R = r_1$ (s.Gl.(509)). Die 1. Nullstelle ergibt sich, wenn die eckige Klammer gleich π ist, also für $R = [2\lambda(1/\ell + 1/a)^{-1}]^{1/2}$ oder $R = r_2 = r_1 \sqrt{2}$.

Eine solche Periodizität wird man i.Allg. erwarten; denn sie ist typisch für Beugungserscheinungen (s. z.B. Abb.188, S.352). Betrachtet man aber die Intensitäten, so ergibt sich aus Gl.(510) das überraschende Ergebnis, dass die Lichtintensität durch Zwischenschalten eines Schirmes mit einer konzentrischen Öffnung nicht in jedem Fall geschwächt, sondern bei geeignet gewähltem Radius der Öffnung ($R = r_1$)

sogar um den Faktor vier (!) vergrößert werden kann. Der Grund dafür ist die Verhinderung der destruktiven Interferenz mit Wellen, die von anderen Fresnel-Zonen ausgehen. Man kann diesen Gedanken weiterführen und an Stelle des Schirmes eine durchlässige Platte verwenden, auf die undurchsichtige Kreisringe so aufgedampft sind, dass sie die geradzahligen Fresnel-Zonen ($\kappa = 2, 4, 6, \dots$) abdecken. Damit bleiben nur die Wellen von den ungeradzahligen Fresnel-Zonen ($\kappa = 1, 3, 5, \dots$) übrig. Die Gangunterschiede zwischen diesen Wellen sind aber ganzzahlige Vielfache von λ , weshalb es zu einer wesentlichen Verstärkung der Lichtintensität an der Stelle A kommt. Eine solche **Fresnel'sche Zonenplatte** (zone plate) wirkt also wie eine Sammellinse. Fresnel'sche Zonenplatten sind leicht und flach, sie finden vor allem dort Anwendung, wo es nicht auf eine hohe Qualität der optischen Abbildung ankommt. Ihr Hauptnachteil ist die starke chromatische Aberration.

Die Fresnel'sche Zonenplatte, deren Wirkung auf der Interferenz beruht, darf nicht mit der **Fresnel-Linse** (Fresnel lens) verwechselt werden. Bei der letzteren handelt es sich um eine extrem dünne Sammellinse, die dadurch entsteht, dass ihr Querschnitt stufenförmig strukturiert wird. (Bei den Prismenstücken, in die man die Sammellinse nach Abb.158, S.318, zerlegen kann, werden die inneren Glasteile weggelassen, d.h. die schrägen Flächen durch Parallelverschiebung aneinander gerückt.) Die Fresnel-Linsen sind leicht und robust, sie haben aber relativ schlechte optische Eigenschaften, weshalb sie meist nur in Kamerasuchern und Scheinwerfern Verwendung finden.

Um eine **Fresnel'sche Zonenplatte** (zone plate) mit der Brennweite f zu konstruieren, ersetzen wir in Gl.(509) den Term $(1/\ell + 1/a)^{-1}$ gemäß der Linsengleichung (s. die linke Gl.(467), S.317) durch f . Damit sind die Kreisringe zwischen $r_1 = (\lambda f)^{1/2}$ und $r_2 = r_1\sqrt{2}$, sowie zwischen $r_3 = r_1\sqrt{3}$ und $r_4 = r_1\sqrt{4}$ usw. zu schwärzen. Man erkennt hieraus, dass Fresnel'sche Zonenplatten eine sehr starke chromatische Aberration besitzen; denn für eine gegebene Zonenplatte, d.h. wenn r_1 einen bestimmten Wert besitzt, gilt $f = r_1^2/\lambda$. Eine einfache Überlegung zeigt, dass man auch eine Fresnel'sche Zonenplatte erhält, wenn die geschwärzten und die durchlässigen Flächen vertauscht werden.

In den letzten Jahren haben Fresnel'sche Zonenplatten große Bedeutung für die Abbildung durch Röntgenstrahlen gewonnen. Man benutzt dabei dünne, für Röntgenstrahlen durchlässige Folien, auf die aus Schwermetallen bestehende undurchlässige Zonen aufgedampft werden.

22.8 Holografie

Die **Holografie** (holography) ist eine Methode, mit der man räumliche Bilder von Gegenständen erzeugen kann. Voraussetzung ist die Verfügbarkeit von kohärentem Licht (s.S.331), das am einfachsten mit Hilfe eines Lasers (s.S.333) erzeugt wird.

Abb.199 zeigt schematisch die Herstellung eines Hologramms. Das von oben kommende Laserlicht wird an einem halbdurchlässigen Spiegel S zum Teil reflektiert. Dieser Anteil bildet die **Referenzwelle** (reference wave). Das hindurch tretende Licht beleuchtet das räumliche Objekt, das dadurch die **Objektwellen** (scattered waves) abstrahlt. Die Interferenz von Referenz- und Objektwellen (in Abb.199 ist nur die Objektwelle des Punktes P dargestellt) erzeugt in der Photoplatte ein Schwärzungsmuster, das als **Hologramm** (hologram) des räumlichen Objekts bezeichnet wird. Dieses Muster unterscheidet sich qualitativ von einem normalen Photo und erlaubt bei Betrachtung mit dem üblicherweise vorhandenen inkohärenten Licht keine Rückschlüsse auf das räumliche Objekt. Erst durch Bestrahlung des Hologramms mit *Laserlicht der gleichen Wellenlänge* erhält man eine räumliche Darstellung des Objekts, und zwar sowohl ein virtuelles als auch ein reelles Bild (s.Abb.200). Das von links einfallende Laserlicht besteht nach Durchstrahlung des Hologramms aus drei Anteilen: (1) dem nicht abgelenkten Anteil, der uninteressant ist, (2) einem divergenten Anteil, dessen rückwärtige Verlängerung das virtuelle Bild gibt und (3) einem konvergenten Anteil, durch den das reelle Bild entsteht.

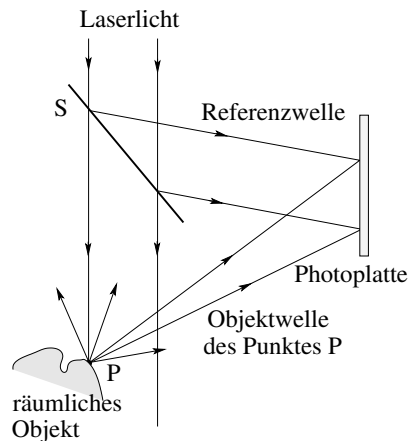


Abbildung 199. Aufnahme eines Hologramms. S bezeichnet einen halbdurchlässigen Spiegel. In der Photoplatte (Träger des Hologramms) wird durch die Interferenz mit der Referenzwelle auch die Phaseninformation über das von dem räumlichen Objekt abgestrahlte Licht (Objektwellen) gespeichert

Wenn das räumliche Objekt in Abb.199 nur aus dem Punkt P besteht, dann entspricht das Hologramm einer Fresnel'schen Zonenplatte (s.S.366); denn nach Abb.200 wird achsenparalleles Licht in dem Punkt P_r konzentriert. Der senkrechte Abstand dieses Punktes P_r (und damit auch des Punktes P) vom Hologramm ist somit gleich der Brennweite der Fresnel'schen Zonenplatte.

Die Holografie hat gegenüber der normalen Photographie im Wesentlichen drei Vorteile:

1.) Die Holografie liefert räumliche Bilder. 2.) Die Information zu jedem Objektpunkt ist über das gesamte Hologramm verteilt, so dass man sogar mit Bruchstücken der

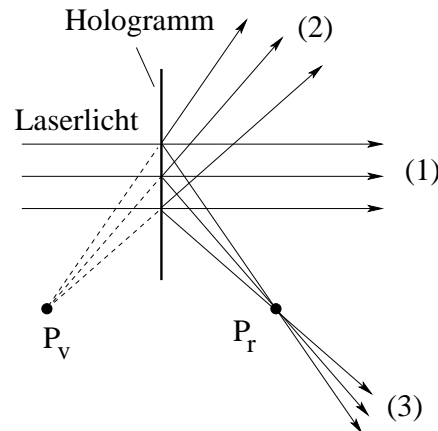


Abbildung 200. Betrachtung eines Hologramms. Das Hologramm wird von links mit Laserlicht bestrahlt, der Betrachter blickt von rechts auf das Hologramm. P_v ist das virtuelle und P_r das reelle Bild des Punktes P von Abb. 199

Photoplatte das gesamte Bild erhält, wobei allerdings der Kontrast geringer ist. 3.) Die Holografie benötigt keine Linsen, die ja stets mit Fehlern behaftet sind. Der Hauptnachteil ist die Notwendigkeit, bei der Herstellung von Hologrammen Laserlicht zu verwenden.

Ein **Weißlichthologramm** (white light hologram) kann auch mit weißem Licht betrachtet werden. Bei der Herstellung eines Weißlichthologramms lässt man die Objektwelle z.B. von vorn und die Referenzwelle von hinten auf die Photoplatte fallen. Dadurch bilden sich stehende Wellen aus, die im Abstand $\lambda/2$ (s.S. 89) die Emulsion schwärzen. Auf diese Weise entstehen in der Photoplatte mehrere übereinander liegende Hologramme. Bei der Bestrahlung einer solchen Photoplatte mit weißem Licht wird infolge der Interferenz nur einfarbiges Licht reflektiert, analog zur Reflexion an den Netzebenen eines Kristalls (s.Gl. (492), S. 346) und das Bild erscheint je nach der Blickrichtung in einer anderen Farbe. Verwendet man bei der Aufnahme drei Laser mit den Farben rot, grün und blau, so lassen sich auch farbige holographische Bilder erzeugen.

23 Polarisation des Lichtes

Marie von Ebner-Eschenbach: Wer nichts weiß, muss alles glauben.

Licht gehört zu den **elektromagnetischen Wellen** (electromagnetic waves). Diese ergeben sich als Lösung der Maxwell-Gleichungen beispielsweise für das Feld eines elektrischen Dipols, dessen Dipolmoment eine Funktion der Zeit ist (s.S.280). Nehmen wir eine sinusförmige Zeitabhängigkeit mit der Frequenz f an und betrachten Abstände vom Dipol, die groß sind gegen die Wellenlänge $\lambda = c/f$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit in dem betreffenden Dielektrikum (Medium) bezeichnet, so liefert die Theorie die für das Folgende wesentlichen Aussagen:

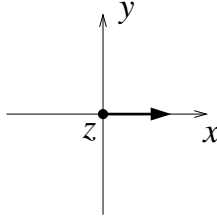
- (1) Die elektrische $\vec{E}(t)$ und die magnetische Feldstärke $\vec{H}(t)$ stehen senkrecht aufeinander und senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Wellen (s.S.285).
- (2) Die durch eine Fläche $d\vec{a}$ transportierte mittlere Leistung ist $\vec{S} \cdot d\vec{a}$, wobei sich der Vektor \vec{S} (Poynting-Vektor, s.S.286) aus dem über die Zeit gemittelten Vektorprodukt der elektrischen und magnetischen Feldstärke ergibt, d.h. es gilt $\vec{S} = \langle \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \rangle_t$.
- (3) Die elektrische und die magnetische Feldstärke sind in Phase und für den Zusammenhang zwischen ihren Beträgen gilt $|\vec{E}(t)|(\epsilon_r \epsilon_0)^{1/2} = |\vec{H}(t)|(\mu_r \mu_0)^{1/2}$ (s.Gl.(426), S.286).

Wir brauchen also im Weiteren zur Beschreibung der elektromagnetischen Wellen nur den Vektor $\vec{E}(t)$ anzugeben. Außerdem kann man für die meisten Stoffe, die in der Optik eine wesentliche Rolle spielen, $\mu_r = 1$ setzen. A 135 A 136 A 137

Zur Definition der **Polarisation des Lichtes** (polarization of light) betrachte man die Abb.201. Die Ausbreitung der elektromagnetischen Welle mit der Frequenz f und der Wellenlänge λ erfolge in z -Richtung, d.h. senkrecht zur Zeichenebene auf den Beobachter zu. Wenn dann die elektrische Feldstärke ständig in einer die z -Achse enthaltenden, vorgegebenen Ebene senkrecht zu z liegt, z.B. $\vec{E}(t) = \vec{e}_x \hat{E}_x \sin[\omega t - (2\pi/\lambda)z]$ mit $\omega = 2\pi f$ und \vec{e}_x als dem Einheitsvektor in x -Richtung (s.Abb.201, oberes Bild), dann spricht man von einer **linear polarisierten Welle** (plane-polarized wave). Diese Ebene, im vorliegenden Fall ist es die x - z -Ebene, nennt man die **Schwingungsebene** (plane of oscillation). Die dazu senkrechte Ebene, in der der Vektor der magnetischen Feldstärke liegt, heißt **Polarisationsebene** (plane of polarization). Ü 145 A 138 A 139

In der neueren, vor allem englischsprachigen Literatur, scheint sich allerdings zunehmend die Verwendung des Begriffs Polarisationsebene für jene Ebene durchzusetzen, in der das *elektrische* Feld schwingt.

linear



rechtselliptisch

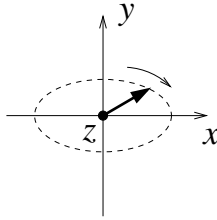
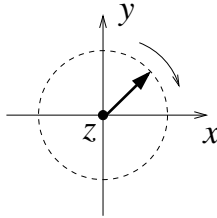
rechtszirkular
polarisiert

Abbildung 201. Zur Definition der Polarisation einer elektromagnetischen Welle. Der Pfeil stellt die elektrische Feldstärke $\vec{E}(t)$ dar. Die Ausbreitung der Welle erfolgt in z -Richtung, d.h. senkrecht zur Zeichenebene auf den Betrachter zu

Addiert man zu dieser Welle eine zweite, senkrecht dazu linear polarisierte Welle (ihre Schwingungsebene ist die y - z -Ebene in Abb.201) mit einer Phasenverschiebung von $+\pi/2$, so ergibt sich eine **rechtselliptisch polarisierte Welle** (right-handed elliptically polarized wave) $\vec{E}(t) = \vec{e}_x \hat{E}_x \sin[\omega t - (2\pi/\lambda)z] + \vec{e}_y \hat{E}_y \cos[\omega t - (2\pi/\lambda)z]$ (s.Abb.201, mittleres Bild), die im Spezialfall gleicher Amplituden ($\hat{E}_x = \hat{E}_y = \hat{E}$) **rechtszirkular polarisierte Welle** (right-handed circularly polarized wave) heißt (s.Abb.201, unteres Bild). Für eine Phasenverschiebung von $-\pi/2$ kehrt sich die Umlaufrichtung in dem mittleren und unteren Bild von Abb.201 um und man spricht von einer **linkselliptisch** (left-handed) bzw. **linkszirkular** (left-handed circularly) polarisierten Welle.

Wir betrachten einen rechtszirkular polarisierten Lichtstrahl. Dann gilt: (1) *Die Momentaufnahme des elektrischen Feldes stellt eine Rechtsschraube dar.* (2) *In einer festen Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung dreht sich die elektrische Feldstärke bei Betrachtung entgegen der Strahlrichtung im Uhrzeigersinn (s.Abb.201, unteres Bild).* Damit besteht also die Ausbreitung des rechtszirkular polarisierten Lichts in einer Parallelverschiebung der Rechtsschraube, d.h. ohne Drehung, längs ihrer Achse.

23.1 Die Fresnel-Formeln

Wir betrachten Licht, das auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Medien treffe und nehmen zunächst an (1. Fall), dass das Licht linear polarisiert sei mit der elektrischen Feldstärke senkrecht zur Einfallsebene (s.Abb.202). Durch die Indizes e, r und g kennzeichnen wir die einfallende, die reflektierte bzw. die gebrochene Welle. Dann ergibt sich aus der Forderung nach der Stetigkeit der zur Grenzfläche parallelen Komponente der elektrischen Feldstärke (s.S.184) eine erste Gleichung, nämlich

$$E_e + E_r = E_g. \quad (511)$$

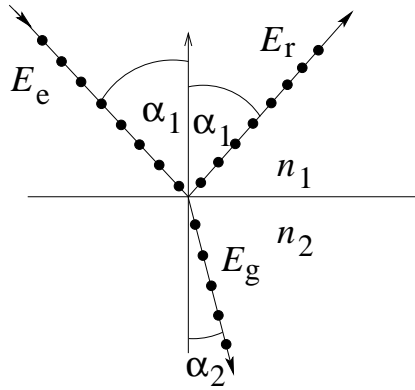


Abbildung 202. Eine linear polarisierte elektromagnetische Welle trifft auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 . Die Schwingungsebene stehe senkrecht auf der Einfallsebene, was durch die Punkte angezeigt wird. E_e , E_r und E_g bezeichnen die elektrische Feldstärke für die einfallende, die reflektierte bzw. die gebrochene Welle

Eine zweite Gleichung folgt aus der Tatsache, dass in der Grenzfläche keine Energieanreicherung oder Energieverarmung stattfinden darf. Da der Poynting-Vektor proportional zu nE^2 ist, wobei n den Brechungsindex des betreffenden Mediums bezeichnet, ergibt sich

$$(E_e^2 - E_r^2)n_1 \cos \alpha_1 = E_g^2 n_2 \cos \alpha_2. \quad (512)$$

Für den Poynting-Vektor $\vec{S} = \langle \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \rangle_t$ (s.S.286) können wir schreiben $S \propto E(t)H(t)$, da $\vec{E}(t)$ und $\vec{H}(t)$ senkrecht aufeinander stehen und in Phase sind (s.S.369). Wegen $E(\varepsilon_r \varepsilon_0)^{1/2} = H(\mu_r \mu_0)^{1/2}$ (s.S.369) sowie der Beziehung $n = (\varepsilon_r \mu_r)^{1/2}$ (s.Gl.(447a), S.306) folgt mit $\mu_r = 1$, dass S in jedem Zeitpunkt proportional zu $nE^2(t)$ sein muss.

Die dritte Gleichung schließlich ist das Brechungsgesetz (s.Gl.(446), S.305)

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (513)$$

A 140

Aus diesen drei Gleichungen folgen nach einer einfachen Zwischenrechnung die Beziehungen

$$E_r = -E_e \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (514)$$

und

$$E_g = E_e \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (515)$$

Die Gl.(512) dividiert durch die Gl.(511) gibt wegen $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ die Beziehung $(E_e - E_r)n_1 \cos \alpha_1 = E_g n_2 \cos \alpha_2$. Mit Gl.(513) folgt $(E_e - E_r) \cos \alpha_1 = (E_g \cos \alpha_2) \sin \alpha_1 / \sin \alpha_2$. Hier ersetzen wir E_g nach Gl.(511) und erhalten $(E_e - E_r) \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 = (E_e + E_r) \cos \alpha_2 \sin \alpha_1$. Die Auflösung dieses Ausdrucks nach E_r gibt $E_r = E_e \cdot [\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2] / [\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2]$. Unter Beachtung des Additionstheorems $\sin(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \pm \sin \alpha_2 \cos \alpha_1$ ist dies identisch mit der gesuchten Gl.(514). Setzen wir die Gl.(514) in Gl.(511) ein, so folgt $E_g = E_e [\sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] / \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$. Für den Zähler ergibt sich unter Verwendung des erwähnten Additionstheorems $2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1$ und damit die gesuchte Gl.(515).

Im 2. Fall liegt die elektrische Feldstärke in der Einfallsebene (s.Abb.203).

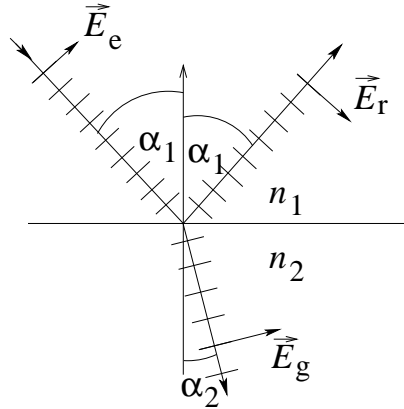


Abbildung 203. Eine linear polarisierte elektromagnetische Welle trifft auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 . Die Schwingungsebene liege in der Einfallsebene, was durch die Querstriche angezeigt wird. \vec{E}_e , \vec{E}_r und \vec{E}_g bezeichnen die elektrische Feldstärke für die einfallende, die reflektierte bzw. die gebrochene Welle

Die Forderung nach der Stetigkeit der zur Grenzfläche parallelen Komponente der elektrischen Feldstärke liefert hier an Stelle von Gl.(511) die Beziehung

$$E_e \cos \alpha_1 + E_r \cos \alpha_1 = E_g \cos \alpha_2. \quad (516)$$

Die beiden anderen Bedingungen sind identisch mit den Gln.(512) und (513). Durch Auflösung dieser Gleichungen nach E_r und E_g analog zu dem kleingedruckten Text oben ergeben sich die Beziehungen

$$E_r = -E_e \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (517)$$

und

$$E_g = E_e \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (518)$$

Die Gln.(514), (515), (517) und (518) werden als **Fresnel-Formeln** (Fresnel equations) bezeichnet. Sie wurden 1822 von Jean Augustin Fresnel (1788-1827) ohne Kenntnis der Theorie der elektromagnetischen Wellen auf viel kompliziertere Weise abgeleitet. Wir wollen im Folgenden drei wichtige Schlussfolgerungen bzw. Anwendungen der Fresnel-Formeln behandeln.

(1) Die Gln.(514) und (517) besagen,

dass bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium ($n_2 > n_1$) die Phase der reflektierten Welle um π springt, während sie sich für $n_2 < n_1$ nicht ändert.

Aus $n_2 > n_1$ folgt nach Gl.(513) die Ungleichung $\alpha_1 > \alpha_2$. Setzt man dies in die Gln.(514) und (517) ein, so ergibt sich eine Vorzeichenumkehr ($E_r \propto -E_e$), was einem Phasensprung um den Winkel π entspricht. Bei $n_2 < n_1$ folgt $\alpha_1 < \alpha_2$ und $E_r \propto +E_e$.

(2) Aus der Gl.(517) folgt, dass E_r verschwindet, sobald der reflektierte und der gebrochene Strahl einen Winkel $\pi/2$ miteinander bilden ($\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$, s.Abb.203), da dann der Nenner unendlich wird. Es bleibt also bei einfallendem natürlichem, d.h. unpolarisiertem Licht im reflektierten Strahl nur die Komponente E_r nach Gl.(514) übrig. Dies bedeutet:

*Wenn der reflektierte und der gebrochene Strahl senkrecht aufeinander stehen, so ist das reflektierte Licht zu 100% linear polarisiert, und zwar in der Weise, dass die elektrische Feldstärke senkrecht auf der Einfallsebene steht (**Brewster-Gesetz**, Brewster law, David Brewster 1781-1868).*

Der gebrochene Strahl ist dagegen nur zum Teil linear polarisiert; denn es gibt sowohl eine Komponente der elektrischen Feldstärke senkrecht (E_g nach Gl.(515)) als auch parallel (E_g nach Gl.(518)) zur Einfallsebene. Allerdings muss die letztere Komponente überwiegen, da ja dem natürlichen Licht durch die Reflexion ein linear

polarisierter Anteil entzogen ist. Das Brewster-Gesetz lässt sich anschaulich verstehen, wenn man den Übergang des Lichtes vom Vakuum ($n_1 = 1$) zu einem Medium ($n_2 > 1$) betrachtet und bedenkt, dass eine linear schwingende Ladung (Hertz'scher Dipol) nicht in ihrer Schwingungsrichtung strahlt (s.Gl.430, S.287). Da nun die am Auftreffpunkt des einfallenden Strahles im Medium sitzenden Ladungen zu erzwungenen Schwingungen in Richtung der elektrischen Feldstärke (Richtung der Striche am gebrochenen Strahl in Abb.203) angeregt werden, muss E_r für $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ verschwinden.

(3) *Reflexminderung durch Beschichtung.* Durch Bedampfung einer Linse mit einer dünnen durchsichtigen Schicht geeigneter Dicke ℓ und mit einem geeigneten Brechungsindex n_A (s.u.) lässt sich erreichen, dass praktisch das gesamte auffallende Licht in die Linse eintritt. Auf diese Weise erhöht man bei modernen Objektiven von Ferngläsern, Photoapparaten usw. die Lichtstärke (**Antireflexionsschicht, T-Optik, Vergütung von Linsen**, antireflection coating). Eine vollständige Unterdrückung der Reflexion gelingt allerdings nur für senkrechten Einfall und eine bestimmte Wellenlänge des Lichtes. Durch Übereinanderdampfen von Antireflexionsschichten für verschiedene Wellenlängen lässt sich aber die Reflexion auch in gewissen Wellenlängenbereichen weitestgehend unterdrücken. Wenn man die Dicke λ der Antireflexionsschicht so wählt, dass

$$\ell = \lambda_A/4 \quad (519)$$

gilt, wobei λ_A die Wellenlänge des Lichtes in der Antireflexionsschicht bezeichnet, so löscht sich die an der oberen Grenzfläche der Schicht reflektierte Welle (0 in Abb.204) mit der an der unteren Grenzfläche reflektierten Welle (1 in Abb.204) aus. A 141

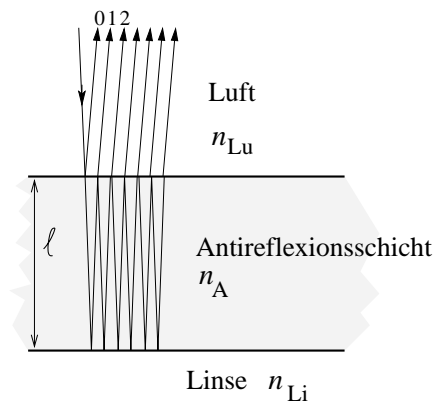


Abbildung 204. Zur Wirkungsweise einer Antireflexionsschicht. n_{Li} , n_A und n_{Lu} bezeichnen die Brechungsindizes des Linsenmaterials, der Antireflexionsschicht bzw. der Luft

Allerdings muss dafür die Beziehung $n_{\text{Li}} > n_{\text{A}} > n_{\text{Lu}}$ erfüllt sein, da nur dann in beiden Fällen die Reflexion an einem optisch dichteren Medium erfolgt und damit der Phasenunterschied lediglich durch die Wegdifferenz $2\ell = \lambda_{\text{A}}/2$ gegeben wird. An der Interferenz mit der Welle 0 ist aber nicht nur die Welle 1 beteiligt, die einmal durch die Schicht hin- und hergegangen ist, sondern es tragen auch alle diejenigen Wellen zur Interferenz bei, die das zweimal (Welle 2 in Abb. 204), dreimal usw. getan haben. Damit es zur Auslöschung zwischen der Welle 0 und der Summe der Wellen 1, 2, 3, ... kommt, muss neben Gl. (519) noch die Bedingung

$$n_{\text{A}} = \sqrt{n_{\text{Lu}} n_{\text{Li}}} \quad (520)$$

erfüllt werden.

Aus Gl. (514), S. 372, ergibt sich unter Verwendung des Additionstheorems $\sin(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \pm \sin \alpha_2 \cos \alpha_1$ und unter der Annahme eines nahezu senkrechten Einfalls ($\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx 1$) die Gleichung $E_{\text{r}} = -E_{\text{e}}(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)/(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$. Mit dem Brechungsgesetz (Gl. (513), S. 372) vereinfacht sich diese Beziehung zu $E_{\text{r}} = -E_{\text{e}}(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)$. Das gleiche Resultat folgt für E_{r} nach Gl. (517), S. 373, da bei kleinen Winkeln (senkrechter Auffall) der Tangens durch den Sinus ersetzt werden kann. Damit ergibt sich für den Reflexionsfaktor ($E_{\text{r}}/E_{\text{e}}$) an der Grenzfläche Luft/Antireflexionsschicht $\rho = -(n_{\text{A}} - n_{\text{Lu}})/(n_{\text{A}} + n_{\text{Lu}})$, an der Grenzfläche Antireflexionsschicht/Linse $\sigma = -(n_{\text{Li}} - n_{\text{A}})/(n_{\text{Li}} + n_{\text{A}})$ und an der Grenzfläche Antireflexionsschicht/Luft $-(n_{\text{Lu}} - n_{\text{A}})/(n_{\text{Lu}} + n_{\text{A}}) = -\rho$. Die relative elektrische Feldstärke der Welle 0 ist damit ρ . Für die der Welle 1 folgt $(-1)(1 + \rho) \cdot \sigma(1 - \rho)$, wobei der erste Faktor die Weglänge berücksichtigt. Der zweite Faktor ergibt sich aus der Stetigkeit der zur Grenzschicht parallelen Komponente der elektrischen Feldstärke, die auf der Seite der Luft gleich $E_{\text{e}} + \rho E_{\text{e}}$ ist. Der dritte Faktor berücksichtigt die Reflexion an der unteren Grenzfläche der Antireflexionsschicht und der vierte Faktor die Reflexion an der oberen Grenzfläche. Analog ergibt sich $(-1)^2(1 + \rho)\sigma^2(-\rho)(1 - \rho)$ für die relative elektrische Feldstärke der Welle 2 usw. Die Summe der relativen elektrischen Feldstärken für die Wellen 1, 2, 3, ... ist also $(-1)(1 - \rho)(1 + \rho)\sigma[1 + \rho\sigma + (\rho\sigma)^2 + \dots]$, wofür sich unter Verwendung der Summenformel $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1 - q)^{-1}$ (gültig für $0 < q < 1$) der Ausdruck $(-1)(1 - \rho^2)\sigma(1 - \rho\sigma)^{-1}$ ergibt. Die Bedingung $\rho + (-1) \cdot (1 - \rho^2)\sigma(1 - \rho\sigma)^{-1} = 0$ (Auslöschung der Welle 0 durch die Summe der Wellen 1, 2, 3, ...) wird erfüllt für $\rho = \sigma$. Einsetzen der obigen Beziehungen für ρ und σ liefert die Gleichung $(n_{\text{A}} - n_{\text{Lu}})(n_{\text{Li}} + n_{\text{A}}) = (n_{\text{Li}} - n_{\text{A}})(n_{\text{A}} + n_{\text{Lu}})$ oder $n_{\text{A}}^2 = n_{\text{Lu}} n_{\text{Li}}$.

Ü 146

23.2 Natürliche Doppelbrechung

Ein **Kristall** (crystal) entsteht durch Aneinanderreihung der kleinsten Einheit der betreffenden Kristallstruktur. Diese Einheit nennt man **Elementarzelle** oder **Ein-**

heitzzelle (unit cell). Sie wird durch die drei **Basisvektoren** (unit vectors) \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt. Diese Basisvektoren verbinden äquivalente Punkte des Kristalls miteinander, d.h. Punkte, deren Umgebung im Kristall völlig gleich ist. Die Gesamtheit aller durch die Vektoren $\vec{r}_{n_1, n_2, n_3} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$ mit ganzzahligen Werten n_1, n_2, n_3 entstehenden Punkte bildet das **Gitter** (lattice) des Kristalls. Alle Gitter lassen sich in die sieben **Kristallsysteme** (crystal systems) einordnen, die in der Tab.72 zusammengestellt sind.

Tabelle 72. Die sieben Kristallsysteme. Durch Kombination mit den in der letzten Spalte angegebenen Zentrierungstypen entstehen die vierzehn Bravais-Gitter (s.Abb.205). \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sind die drei Basisvektoren der Einheitszelle. Vereinbarungsgemäß zeichnet man \vec{c} nach oben (s.Abb.205). In der Spalte "Winkel zwischen den Basisvektoren" stellt die erste Angabe den Winkel zwischen \vec{b} und \vec{c} dar, die zweite betrifft \vec{a} , \vec{c} und die dritte \vec{a} , \vec{b}

Kristallsystem	Länge der Basisvektoren ($a \neq b \neq c$)	Winkel zwischen den Basisvektoren ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$), ($\alpha, \beta, \gamma \neq \pi/2$)	Zentrierungstyp (zusammen mit dem Kristallsystem liefern sie die Bravais-Gitter)
kubisch (cubic)	a, a, a	$\pi/2, \pi/2, \pi/2$	P, I, F
trigonal (trigonal)	a, a, a	α, α, α	P
tetragonal (tetragonal)	a, a, c	$\pi/2, \pi/2, \pi/2$	P, I
hexagonal (hexagonal)	a, a, c	$\pi/2, \pi/2, 2\pi/3$	P
rhombisch (rhombic)	a, b, c	$\pi/2, \pi/2, \pi/2$	P, I, F, C
monoklin (monoclinic)	a, b, c	$\pi/2, \beta, \pi/2$	P, C
triklin (triclinic)	a, b, c	α, β, γ	P

Der Würfel gehört zum kubischen und der "Ziegelstein" zum rhombischen Kristallsystem. Das kubische Kristallsystem besitzt die größte und das trikline Kristallsystem die geringste Symmetrie. Das trigonale Kristallsystem wird mitunter auch als **rhomboedrisch** (rhombohedral), das rhombische als **orthorhombisch** (orthorhombic) bezeichnet. Wenn die Einheitszelle nur an den Ecken besetzt ist, nennt man sie **primitiv** (simple, Symbol P oder s); ist noch der Schnittpunkt der Raumdiagonalen besetzt, so heißt sie **innenzentriert** (body-centred, Symbol I oder b.c.). Sind neben den Ecken noch die Zentren der Flächen besetzt, so wird die Einheitszelle **flächenzentriert** (face-centred, Symbol F oder f.c.) genannt. Das Symbol C ist für die Fälle vorgesehen, bei denen die Flächen nicht gleichwertig sind und nur die von \vec{a}, \vec{b} aufgespannte Fläche zentriert ist (A und B betreffen die Flächen \vec{b}, \vec{c} bzw. \vec{a}, \vec{c}). Ein Kristall, der aus primitiven Einheitszellen (P) besteht, enthält also, da hier alle Gitterpunkte den benachbarten Einheitszellen gemeinsam sind, nur einen Gitterpunkt pro Einheitszelle. Bei A, B, C, I sind es zwei und bei F vier. Da nicht alle Kombinationen der sieben Kristallsysteme mit jedem **Zentrierungstyp** (packing type) I, F, A, B und C sinnvoll sind (d.h. die Symmetrie der primitiven

Einheitszelle erhalten, s. Tab.72), entstehen die vierzehn in Abb.205 dargestellten **Bravais-Gitter** (Bravais-lattices, Auguste Bravais 1811-1863). A 142

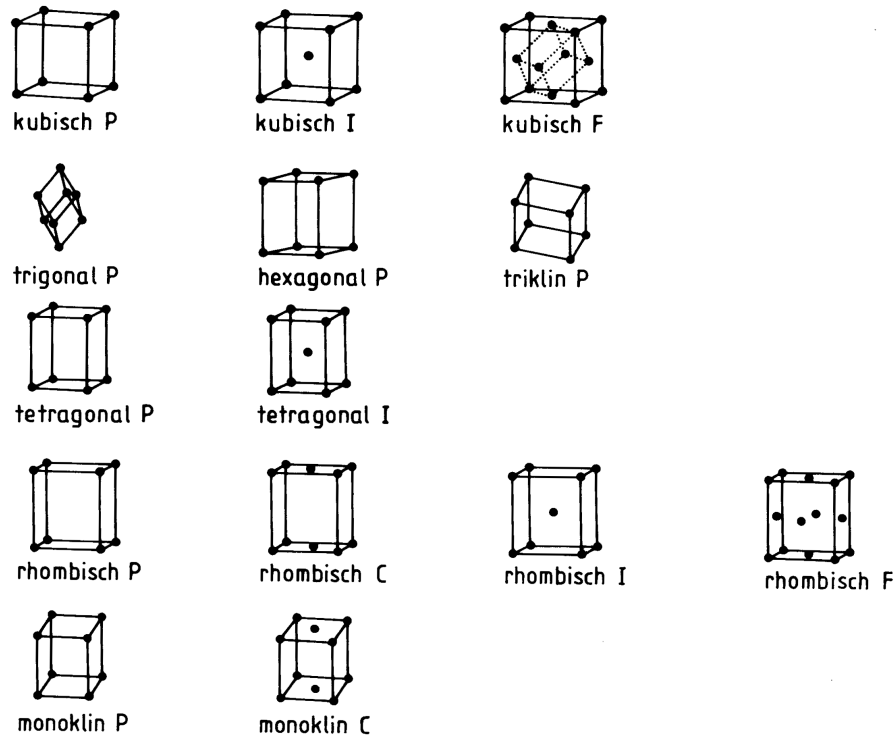


Abbildung 205. Die vierzehn Bravais-Gitter (s. auch Tab.72)

In Kristallen, die zum kubischen Kristallsystem gehören, wie z.B. Steinsalz oder Diamant, und in amorphen Stoffen (z.B. Glas) hängt die relative Dielektrizitätskonstante ε_r nicht von der Richtung des elektrischen Feldes ab. Für die elektromagnetischen Wellen bedeutet dies (s.Gl.(447a), S.306), dass der Brechungsindex n unabhängig von der Ausbreitungsrichtung der Wellen ist. Man spricht von einem optisch **isotropen Medium** (isotropic medium). In allen anderen Fällen kann eine optische **Anisotropie** (anisotropy) auftreten, die meist mit einer Anisotropie anderer Eigenschaften, wie z.B. der Wärmeleitfähigkeit oder des Elastizitätsmoduls verknüpft ist. Die optische Anisotropie bedeutet, dass der Brechungsindex von der Ausbreitungsrichtung des Lichtes bezüglich der Einheitszelle des Kristalls abhängt, oder, mit anderen Worten, dass der Brechungsindex ein Tensor sein muss.

Bei Kristallen, die zum trigonalen, tetragonalen oder hexagonalen Kristallsystem gehören, ist dieser Tensor axialsymmetrisch, d.h. zwei seiner drei Hauptwerte sind gleich (s.Tab.73). Man spricht dann von optisch **einachsigen Kristallen** (uniaxial crystals). Die Richtung der Symmetrieachse des Tensors wird als **optische Achse** (optical axis) und jede Ebene, die durch die optische Achse und einen nicht auf ihr liegenden (beliebigen) Punkt bestimmt wird, als **Hauptschnitt** (principal section) des Kristalls bezeichnet. Die optische Achse stimmt bei optisch einachsigen Kristallen mit der Symmetrieachse der betreffenden Elementarzelle überein. Bei Kristallen, die zum rhombischen, monoklinen oder triklinen Kristallsystem gehören, können die drei Hauptwerte verschieden sein, so dass der Kristall zwei optische Achsen besitzt (optisch **zweiachsige Kristalle**, biaxial crystals).

Wir behandeln zunächst die Ausbreitung einer ebenen, linear polarisierten elektromagnetischen Welle in einem optisch einachsigen Kristall, indem wir denjenigen Hauptschnitt betrachten, in dem der Vektor der Strahlrichtung (s.u.) liegt. Dann gibt es zwei Möglichkeiten. Bei der einen steht die elektrische Feldstärke senkrecht auf diesem Hauptschnitt (**ordentliche Welle**, ordinary wave, s.Abb.206, bei der anderen liegt sie in dieser Ebene (**außerordentliche Welle**, extraordinary wave, s.Abb.207).

Wenn wir im Folgenden von der **Strahlrichtung** (ray direction) sprechen, meinen wir die Richtung des Energietransportes, d.h. des Poynting-Vektors \vec{S} der betreffenden elektromagnetischen Welle. Die **Ausbreitungsrichtung der Welle** (direction of wave propagation) ist dagegen die Richtung des Wellenvektors \vec{k} , also der Normalen auf den Flächen gleicher Phase der elektromagnetischen Welle. Diese Normale wird in Abb. 209, S.382 als Wellennormale bezeichnet.

Tabelle 73. Hauptwerte des Brechungsindex verschiedener Kristalle bei Zimmertemperatur und $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ [LID90], [KOH96]. n_o ist der Brechungsindex für die ordentliche Welle, die n_e gelten für die außerordentliche(n) Welle(n)

Kristall	Quarz (SiO_2 , quartz)	Kalkspat (CaCO_3 , calcspat)	Natriumnitrat (NaNO_3 , sodium nitrate)	Gips ($\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, gypsum)	Glimmer, ostindisch (mica)
Kristallsystem	trigonal	trigonal	trigonal	monoklin	monoklin
				$n_1 = 1,5298$	$n_1 = 1,5593$
	$n_o = 1,544$	$n_o = 1,658$	$n_o = 1,5854$	$n_2 = 1,5228$	$n_2 = 1,5944$
	$n_e = 1,553$	$n_e = 1,486$	$n_e = 1,3369$	$n_3 = 1,5208$	$n_3 = 1,5612$
optische Bezeichnung	einachsigen- positiv	einachsigen-negativ		zweiachsigen	

Bei der ordentlichen Welle steht die elektrische Feldstärke stets senkrecht auf der optischen Achse (s.Abb.206a, S.380), so dass die in Frage kommende relative Dielek-

trizitätskonstante und damit der zugehörige Brechungsindex n_o unabhängig vom Winkel ϑ zwischen der Ausbreitungsrichtung und der optischen Achse ist: Das Licht breitet sich in allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit (c_0/n_o) aus. Im Gegensatz dazu (s. Abb. 207) hängt bei der außerordentlichen Welle die relative Dielektrizitätskonstante in Richtung des elektrischen Feldes von ϑ ab. Dies bedeutet, dass auch der Brechungsindex n und damit die Lichtgeschwindigkeit (c_0/n) von ϑ abhängen, woraus die Bezeichnung "außerordentlich" resultiert. Wie man aus Abb. 207b leicht ablesen kann, folgt für die Lichtgeschwindigkeit der außerordentlichen Welle in Richtung der optischen Achse c_0/n_o und senkrecht dazu c_0/n_e . In Richtung der optischen Achse ($\vartheta = 0$) besitzt die außerordentliche Welle also die gleiche Geschwindigkeit wie die ordentliche Welle (c_0/n_o). Wenn die Geschwindigkeit der außerordentlichen Welle in allen anderen Richtungen größer ist, dies bedeutet $n_e < n_o$, dann nennt man den Kristall **einachsigenegativ** (negative uniaxial), ansonsten einachsigenpositiv (s. Tab. 73). Die Abb. 207b zeigt demzufolge die Verhältnisse für einen einachsigen negativen Kristall.

Der außerordentliche Brechungsindex einer Welle, deren Normale den Winkel ϑ mit der optischen Achse einschließt, ist gegeben durch

$$\frac{1}{n^2(\vartheta)} = \frac{\sin^2 \vartheta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{n_o^2}. \quad (521)$$

Die Felder \vec{E} , $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r \vec{E}$, \vec{H} , $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ einer sich im Kristall ausbreitenden ebenen Welle mit der Kreisfrequenz ω und dem Wellenvektor \vec{k} besitzen alle den Phasenfaktor $\exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\}$. Die Maxwell-Gleichung $\text{div } \vec{D} = 0$ liefert die Bedingung $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$, d. h. der \vec{D} -Vektor der Welle steht senkrecht auf dem Wellenvektor \vec{k} . Wir betrachten einen nichtabsorbierenden, optisch einachsigen Kristall mit der z -Achse als der Symmetrieachse. Der Tensor der relativen Dielektrizitätskonstanten $\vec{\epsilon}_r$ ist dann diagonal und besitzt die Hauptachsenwerte $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = n_o^2$ und $\epsilon_{zz} = n_e^2$, (s. Gl. 464, S. 316). Die Energiedichte des elektrischen Feldes der Welle im Kristall, ausgedrückt durch den Vektor \vec{D} , ist gegeben durch $W_{el} = 1/(2\epsilon_0) \vec{D} (\vec{\epsilon}_r)^{-1} \vec{D}$. Bei festgehaltenem Wert der Energiedichte $W_{el} = W_{el0}$ liegen die möglichen Endpunkte der Vektoren \vec{D} auf dem Ellipsoid $(D_x^2 + D_y^2)/n_o^2 + D_z^2/n_e^2 = 2\epsilon_0 W_{el0}$. Der Vektor der außerordentlichen Welle schwingt in der von der optischen Achse und von \vec{k} aufgespannten Ebene (dies sei die x - z -Ebene) und steht senkrecht auf dem Wellenvektor \vec{k} , der mit der z -Achse den Winkel ϑ einschließen soll. Die Schnittkurve der x - z -Ebene mit dem obigen Ellipsoid ist eine Ellipse. Normiert man diese zu $x^2/n_o^2 + z^2/n_e^2 = 1$, so ergibt der Abstand des Mittelpunkts der Ellipse zum Punkt $x = n(\vartheta) \cdot \sin(\pi/2 - \vartheta)$, $z = n(\vartheta) \cdot \cos(\pi/2 - \vartheta)$ auf dem Umfang der Ellipse gerade die Brechzahl der außerordentlichen Welle $n(\vartheta)$, da die Schwingungsrichtung von \vec{D} mit der z -Richtung den Winkel $\pi/2 - \vartheta$ bildet. Setzt man die Werte für x und z in die Ellipsengleichung ein, erhält man die gesuchte Gl. (521).

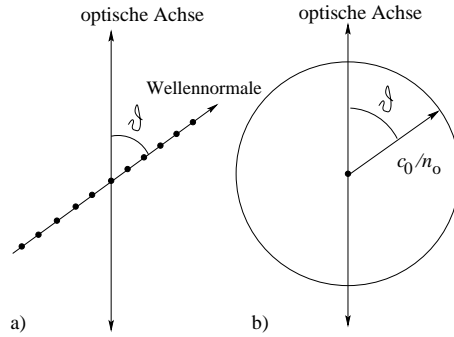


Abbildung 206. a) Zur Ausbreitung linear polarisierten Lichtes in einem optisch einachsigen Kristall. Die elektrische Feldstärke stehe senkrecht auf der durch die optische Achse und die Ausbreitungsrichtung aufgespannten Ebene, was durch die Punkte angedeutet wird (ordentliche Welle). In diesem Fall ist die Lichtgeschwindigkeit c_0/n_o unabhängig vom Winkel ϑ zwischen der Ausbreitungsrichtung und der optischen Achse (s. Abb. b)

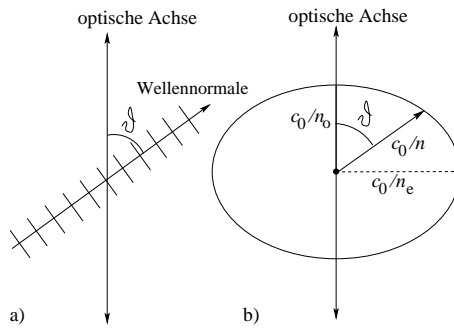


Abbildung 207. a) Zur Ausbreitung linear polarisierten Lichtes in einem optisch negativ einachsigen Kristall. Die elektrische Feldstärke und die dielektrische Verschiebung (durch die Striche angedeutet) liegen in der durch die optische Achse und die Ausbreitungsrichtung aufgespannten Ebene (außerordentliche Welle). In diesem Fall hängt die Lichtgeschwindigkeit vom Winkel ϑ zwischen der Ausbreitungsrichtung und der optischen Achse ab (s. Abb. b).

In optisch zweiachsigen Kristallen gibt es keine ordentliche Welle, sondern zwei außerordentliche Wellen. Diese sind senkrecht zueinander linear polarisiert und ihre Geschwindigkeiten stimmen in *zwei* Richtungen, den beiden optischen Achsen, überein.

Um die Brechung des Lichtes beim Eintritt vom Vakuum in einen optisch einachsigen Kristall zu behandeln, betrachten wir denjenigen Hauptschnitt, der senkrecht zur Kristalloberfläche steht. Das heißt, die optische Achse liegt in der Einfallsebene und bildet mit der Oberflächennormalen einen beliebigen Winkel γ (s. Abb. 208). Wenn das einfallende Licht linear polarisiert ist, und zwar in der Weise, dass die elektrische Feldstärke senkrecht zur Einfallsebene steht, so muss sich das Licht im Kristall als ordentliche Welle fortpflanzen. Im Snellius'schen Brechungsgesetz (s. Gl. (446), S. 305) ist also $n_1 = 1$ (Vakuum) und $n_2 = n_o$ (ordentliche Welle) einzusetzen, d.h. es gilt $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = n_o$. Liegt dagegen die elektrische Feldstärke in der Einfallsebene, so folgt $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = n(\vartheta)$, wobei n nach Abb. 207b eine Funktion des Winkels zwischen der Wellennormalen und der optischen Achse ($\vartheta = \gamma + \alpha_2$) ist (s. Gl. (521)).

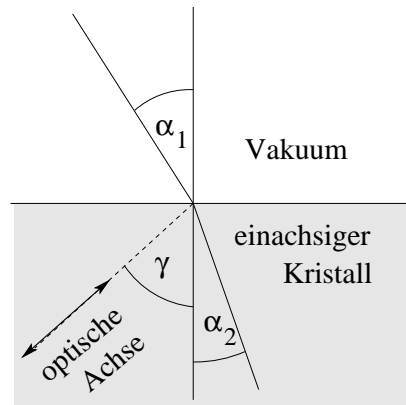


Abbildung 208. Zur Brechung des Lichtes beim Eintritt in einen optisch einachsigen Kristall

Da man natürliches, d.h. unpolarisiertes Licht stets in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen zerlegen kann, ergibt sich bei der Brechung von natürlichem Licht die folgende Erscheinung, die man als **Doppelbrechung** (birefringence oder double refraction) bezeichnet:

Ein einfallender Lichtstrahl spaltet in zwei gebrochene Strahlen auf, die beide linear polarisiert sind.

Der eine Strahl, bei dem die elektrische Feldstärke senkrecht zur Einfallsebene steht, gehorcht dem Snellius'schen Brechungsgesetz mit dem ordentlichen Brechungsindex n_o . Er wird deshalb als ordentlicher Strahl bezeichnet. Bei dem anderen Strahl liegt die elektrische Feldstärke ebenso wie die elektrische Verschiebung in der Einfallsebene. \vec{E} und \vec{D} sind aber in diesem Fall nicht mehr parallel zueinander, sondern bilden einen Winkel δ miteinander. Um denselben Winkel weicht die Strahlrichtung (s.S.378) von der Ausbreitungsrichtung der Welle (Normale auf den Ebenen gleicher Phase) ab. Den Verlauf des außerordentlichen Strahls kann man mit Hilfe des Huygens-Prinzips (s.S.363ff.) konstruieren. Die Abb.209 zeigt dies für den Spezialfall $\alpha_1 = 0$.

Die Doppelbrechung kann benutzt werden, um linear polarisiertes Licht zu erzeugen. Dies ist am einfachsten dann möglich, wenn der ordentliche und der außerordentliche Strahl unterschiedlich stark von dem betreffenden Kristall absorbiert werden (**Dichroismus**, dichroism). Ein klassischer Vertreter dieser Gruppe ist der grüne **Turmalin** (tourmaline). Bestrahlt man eine ca. 1 mm dicke Turmalinplatte senkrecht mit natürlichem Licht, dann wird der ordentliche Strahl praktisch vollständig absorbiert und nur der außerordentliche hindurch gelassen.

Als **Polaroid-Filter** (polaroid) bezeichnet man eine Kunststoffolie, in die langgestreckte, dichroitische Moleküle eingelagert sind. Durch Dehnung oder Einwirkung elektrischer Felder werden diese Moleküle bei der Herstellung der Folie so ausge-

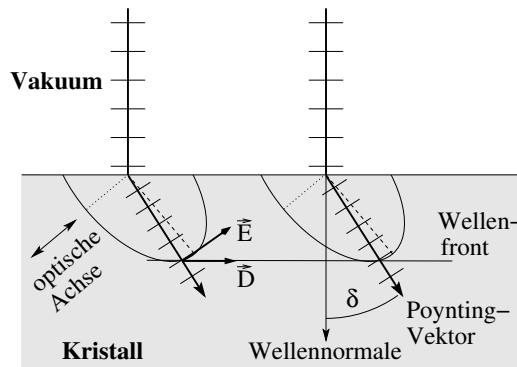


Abbildung 209. Konstruktion des außerordentlichen Strahls unter Verwendung des Huygens-Prinzips. Eine linear polarisierte Welle, deren elektrische Feldstärke in der Einfallsebene liegt, treffe senkrecht auf die Oberfläche eines einachsigen negativen Kristalls. Die gepunkteten bzw. gestrichelten Strecken entsprechen den Lichtgeschwindigkeiten c_0/n_o bzw. c_0/n_e . Während sich die Wellenfronten (Flächen gleicher Phase) im Kristall in die gleiche Richtung wie im Vakuum bewegen (Ausbreitungsrichtung der Welle, s.S.378), weicht die Strahlrichtung (s.S.378) davon ab

richtet, dass das Material als Ganzes wie ein dichroitischer Kristall wirkt. Solche Polaroid-Filter lassen sich großflächig herstellen, jedoch liegt der **Polarisationsgrad** (degree of polarization), d.h. der prozentuale Anteil der Intensität des linear polarisierten Lichtes, meist unter 99%. Für exakte Messungen reicht dies nicht aus. Man muss dann **Polarisationsprismen** (polarization prisms) verwenden, bei denen durch eine geeignete geometrische Anordnung der ordentliche und der außerordentliche Strahl räumlich voneinander getrennt werden. Das erste brauchbare Polarisationsprisma wurde von William Nicol (1768-1851) entwickelt. Dieses **Nicol-Prisma** (Nicol prism) hat, infolge der schräg stehenden Endflächen, den Nachteil, dass der durchgehende außerordentliche Strahl parallel verschoben ist. Außerdem sind diese Prismen relativ lang.

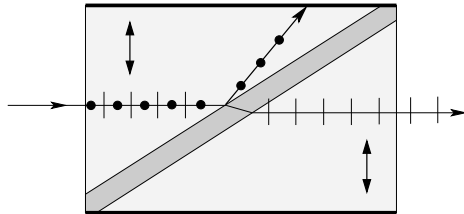


Abbildung 210. Glan-Thompson-Prisma. Der Doppelpfeil bezeichnet, wie üblich, die optische Achse. Der an der Schicht (Kanadabalsam) zwischen den beiden Kalkspatkristallen total reflektierte ordentliche Strahl wird an der geschwärzten Seitenwand absorbiert, so dass nur der außerordentliche Strahl hindurch tritt

Am häufigsten wird heute das in der Abb.210 dargestellte **Glan-Thompson-Prisma** (Glan-Thompson prism, Paul Glan 1846-1898, Silvanus Philipps Thompson 1851-1916) benutzt, das senkrecht stehende Endflächen besitzt. Es handelt sich um einen Kalkspatkristall, den man zunächst so schleift, dass die Endflächen parallel zur

optischen Achse stehen. Danach wird er diagonal durchgeschnitten und anschließend wieder mit einem durchsichtigen Klebstoff verkittet, dessen Brechungsindex zwischen den beiden Werten für Kalkspat (1,486 und 1,658, s.Tab.73, S.378) liegen muss. Gut geeignet dafür ist **Kanadabalsam** (Canada balsam) mit einem Brechungsindex $n = 1,542$. Treffen der parallel verlaufende ordentliche und außerordentliche Strahl an die verkittete Grenzfläche, so wird der ordentliche Strahl (wegen $n_o > n$) total reflektiert und der außerordentliche Strahl infolge der normalen Brechung (wegen $n_e < n$) an der dünnen Schicht Kanadabalsam nur geringfügig seitlich versetzt. Durch Schwärzung der Seitenwand des Prismas erreicht man eine fast vollständige Absorption des ordentlichen Strahls und damit einen Polarisationsgrad von nahezu 100%. Ü 147 Ü 148 Ü 149 Ü 150

23.3 Zirkular und elliptisch polarisiertes Licht

Wir betrachten eine Platte, die aus einem optisch einachsigen Kristall so heraus geschnitten ist, dass die optische Achse parallel zur Oberfläche liegt. Damit geht senkrecht auffallendes Licht unabhängig von seiner Polarisationsrichtung ungebrochen durch diese Platte hindurch, jedoch besitzen der ordentliche und der außerordentliche Strahl, in den das Licht durch den Kristall zerlegt wird, beim Austritt aus der Platte eine Phasenverschiebung α (**Verzögerungsplatte**, retardation plate). Nennen wir die Vakuumwellenlänge des Lichtes λ_0 , die Dicke der Platte ℓ , den Brechungsindex für den ordentlichen Strahl n_o und für den außerordentlichen Strahl n_e , so gilt

$$\alpha = 2\pi \frac{\ell}{\lambda_0} (n_o - n_e). \quad (522)$$

Wir bezeichnen mit λ_{or} die Wellenlänge des ordentlichen Strahles in dem Kristall, aus dem die Platte gefertigt wurde. Dann erfährt der ordentliche Strahl beim Durchlaufen dieser Platte die Phasenverschiebung $2\pi\ell/\lambda_{or}$. Analog folgt für den außerordentlichen Strahl, dessen Wellenlänge λ_{au} genannt werde, $2\pi\ell/\lambda_{au}$. Wegen $\lambda_{or} = \lambda_0/n_o$ und $\lambda_{au} = \lambda_0/n_e$ (s.S.379) ergibt sich für die Differenz α dieser beiden Phasenverschiebungen die Gl.(522).

Im Spezialfall $|\alpha| = \pi/2$ spricht man von einem **$\lambda/4$ -Plättchen** (quarter-wave plate) und bei $|\alpha| = \pi$ von einem **$\lambda/2$ -Plättchen** (half-wave plate).

Ein $\lambda/4$ -Plättchen verwandelt i.Allg. linear polarisiertes in elliptisch polarisiertes Licht. Bei entsprechender Justierung ist dieses Licht zirkular polarisiert. Umgekehrt entsteht linear polarisiertes Licht, wenn man zirkular polarisiertes Licht durch das $\lambda/4$ -Plättchen schickt.

Wir lassen das linear polarisierte Licht so auf das $\lambda/4$ -Plättchen fallen, dass die elektrische Feldstärke um $\pi/4$ gegenüber der optischen Achse geneigt ist. Dann besitzen der ordentliche und der außerordentliche Strahl die gleiche Amplitude. Beim Austritt aus dem $\lambda/4$ -Plättchen überlagern sich also zwei Wellen, die die gleiche Ausbreitungsrichtung, die gleiche Amplitude und eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ besitzen. Dies ist aber gerade eine zirkular polarisierte Welle (s.S.370). Umgekehrt ergibt sich beim Auftreffen einer zirkular polarisierten Welle nach dem Durchgang durch das $\lambda/4$ -Plättchen linear polarisiertes Licht. Wenn der Winkel zwischen der elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle und der optischen Achse zwischen 0 und $\pi/4$ liegt, entsteht am Ausgang elliptisch polarisiertes Licht.

Um ein $\lambda/4$ -Plättchen herzustellen, muss dieses nach Gl.(522) eine Dicke $\lambda = (\lambda_0/4) \cdot |n_o - n_e|^{-1}$ besitzen. Für Kalkspat und $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ bedeutet dies (s.Tab.73, S.378) $\lambda = 0,86 \text{ mm}$, während sich für Quarz $\lambda = 16,4 \text{ mm}$ ergibt. Da die Herstellung sehr dünner Plättchen technisch schwieriger ist, bestehen die $\lambda/4$ -Plättchen meist aus Quarz.

Durch Verwendung eines **Polarisationsfilters** (polarizing filter), wie z.B. eines Polarisationsprismas, und eines $\lambda/4$ -Plättchens lässt sich feststellen, ob ankommendes Licht **linear polarisiert** (linearly polarized light) (l), **zirkular polarisiert** (circularly polarized light) (z), **elliptisch polarisiert** (elliptically polarized light) (e) oder **unpolarisiert** (unpolarized light) (u) ist oder welche Mischung aus diesen verschiedenen Lichtarten vorliegt (**Polarisationsanalyse**, polarization analysis, s. die Tab.74).

Mit Hilfe eines $\lambda/2$ -Plättchens kann man die Polarisationssebene linear polarisierten Lichtes um einen vorgegeben Winkel $\Delta\phi$ drehen. Eine einfache Überlegung zeigt, dass dies erreicht wird, wenn der Winkel β zwischen der elektrischen Feldstärke des einfallenden Lichtes und der optischen Achse der Beziehung

$$\beta = \Delta\phi/2 \quad (523)$$

genügt.

Die elektrische Feldstärke des einfallenden Lichtes besitze die Amplitude \hat{E} und bilde mit der optischen Achse den Winkel β . Dann folgt für die Amplitude des ordentlichen Strahles $\hat{E}_\perp = \hat{E} \sin \beta$ und für die des außerordentlichen Strahles $\hat{E}_\parallel = \hat{E} \cos \beta$. Nach Durchlaufen des $\lambda/2$ -Plättchens gilt für die Komponente der elektrischen Feldstärke senkrecht bzw. parallel zur optischen Achse $E_\perp = \hat{E} \sin \beta \cos(\omega t - 2\pi \ell n_o / \lambda_0)$ bzw. $E_\parallel = \hat{E} \cos \beta \cos(\omega t - 2\pi \ell n_e / \lambda_0)$. Wegen $\pi = 2\pi(\ell/\lambda_0)(n_o - n_e)$ lässt sich die Gleichung für E_\perp umschreiben in $E_\perp = \hat{E} \sin \beta \cos \omega t - 2\pi \ell n_e / \lambda_0 - \pi]$, woraus man wegen $\cos(\gamma - \pi) = -\cos \gamma$ die Beziehung $E_\perp = -\hat{E} \sin \beta \cos(\omega t - 2\pi \ell n_e / \lambda_0)$ erhält. Die Richtung der elektrischen Feldstärke hat sich also nach Durchgang durch das $\lambda/2$ -Plättchen um den Winkel 2β gedreht.

Tabelle 74. Schema einer Polarisationsanalyse zur Feststellung, ob Licht linear polarisiert (l), zirkular polarisiert (z), elliptisch polarisiert (e) oder unpolarisiert (u) ist oder welche Mischung aus diesen verschiedenen Lichtarten vorliegt

1. Experiment: Verwendung eines Polarisationsfilters	
Änderung der Lichtintensität bei Drehung des Polarisationsfilters	Lichtart
Auslöschung	l
keine Abhängigkeit	u, z oder (u+z)
Minimum	e, (u+e) oder (u+l)
2. Experiment: Vor das Polarisationsfilter wird ein $\lambda/4$ -Plättchen gesetzt, das um die Richtung des einfallenden Strahles gedreht werden kann (Drehwinkel β)	
Im 1. Experiment hat sich keine Abhängigkeit ergeben, d.h. es liegt u, z oder (u+z) vor	
Änderung der Lichtintensität bei Drehung des Polarisationsfilters für beliebige Werte von β	Lichtart
keine Abhängigkeit	u
Auslöschung	z
Minimum	u+z
Im 1. Experiment hat sich ein Minimum ergeben, d.h. es liegt e, (u+e) oder (u+l) vor	
Änderung der Lichtintensität bei Drehung des Polarisationsfilters für einen bestimmten Wert von β	Lichtart
Auslöschung	e
Minimum	u+e
keine Abhängigkeit	u+l

23.4 Künstliche Doppelbrechung

Stoffe, die von Natur aus optisch isotrop sind, können durch die Einwirkung äußerer Kräfte (mechanische Verformung, Strömung, elektrische oder magnetische Felder) doppelbrechend werden. Die **Spannungsdoppelbrechung** (photoelasticity oder strain double refraction) wird vor allem bei Kunststoffen und Gläsern beobachtet. In der Zugrichtung vergrößert sich der Abstand der Moleküle, wodurch der Brechungsindex kleiner wird, wogegen er sich senkrecht dazu vergrößert. Zur experimentellen Untersuchung des Spannungszustandes mechanisch belasteter Bauteile, wie z.B. eines Kranhakens, stellt man ein Modell aus durchsichtigem Kunststoff her. Bringt man dieses Modell zwischen gekreuzte Polarisationsfilter, so wird bei Belastung das ansonsten schwarze Gesichtsfeld an den kritischen Stellen aufgehellte. Eine andere Anwendung findet die Spannungsdoppelbrechung bei der Untersuchung von gläsernen Bauteilen (Linsen, Glasküvetten usw.), da rasch abgekühlte Gläser unter permanenten inneren Spannungen stehen. Die Verringerung dieser Spannungen durch wiederholtes langsames Aufheizen und Abkühlen (**Anlassen**, annealing) lässt sich mit Hilfe der Spannungsdoppelbrechung kontrollieren.

Legt man ein elektrisches Feld an eine Substanz an, die aus polaren, beweglichen Molekülen besteht, wie z.B. Nitrobenzol oder Schwefelkohlenstoff, so wird diese doppelbrechend mit der optischen Achse in Richtung des elektrischen Feldes (**Kerr-Effekt**, Kerr effect, John Kerr 1824-1907). Für die Differenz aus dem Brechungsindex der ordentlichen (n_o) und der außerordentlichen (n_e) Welle gilt

$$n_o - n_e = K_E \lambda_0 E^2, \quad (524)$$

wobei E die elektrische Feldstärke und λ_0 die Vakuumwellenlänge bezeichnet. K_E nennt man **Kerr-Konstante** (Kerr constant). Sie hängt vom Material ab und verringert sich mit wachsender Temperatur (s. Boltzmann-Verteilung, S.103ff). Für Nitrobenzol ($C_6H_5NO_2$) bei Zimmertemperatur und $\lambda_0 = 589,3$ nm findet man $K_E = 2,48 \cdot 10^{-12}$ m/V². Die Zeitkonstante für die Ausbildung und den Abbau der Doppelbrechung ist sehr kurz, sie liegt in der Größenordnung der thermischen Umorientierungszeiten der Moleküle (10^{-10} s). Aus diesem Grund lassen sich, indem man eine Kerr-Zelle zwischen gekreuzte Polarisationsfilter setzt, **Lichtschalter** oder **Lichtmodulatoren** (Kerr shutter) bis zu Modulationsfrequenzen von mehreren hundert MHz realisieren.

Legt man an Stelle des elektrischen Feldes E ein Magnetfeld H an, so entsteht ebenfalls eine Doppelbrechung (**Cotton-Mouton-Effekt**, Cotton-Mouton effect, Aimé Cotton 1869-1951, Jean Louis Mouton 1844-1879). Für diese gilt analog zu Gl.(524)

$$n_o - n_e = K_C \lambda_0 H^2. \quad (525)$$

K_C heißt **Cotton-Mouton-Konstante** (Cotton-Mouton constant). Allerdings ist dieser Effekt wesentlich schwächer ($K_C = 3,81 \cdot 10^{-14}$ m/A² für Nitrobenzol bei Zimmertemperatur und $\lambda_0 = 589,3$ nm) und langsamer, so dass er praktisch keine Anwendung gefunden hat. Abschließend sei erwähnt, dass sowohl die natürliche als auch die künstliche Doppelbrechung in der Mikroskopie zur Erhöhung von Kontrasten Verwendung findet, indem man das Objekt zwischen gekreuzte Polarisationsfilter bringt (**Polarisationsmikroskop**, polarization microscope). Ü 154

23.5 Optische Aktivität

23.5.1 Drehung der Polarisationssebene

Unter **optischer Aktivität** (optical activity) versteht man die Fähigkeit bestimmter Stoffe, die Schwingungsebene linear polarisierten Lichtes beim Durchgang durch diese Stoffe zu drehen. Zur Messung verwendet man ein **Polarimeter** (polariscope oder polarimeter). Die einfachste Ausführungsform besteht aus einer Lichtquelle, deren Licht durch eine geeignete Optik parallel gemacht wird (**Kollimator**, collimator), einem ersten Polarisationsfilter (**Polarisator**, polarizer) und einem zweiten,

drehbar angeordneten Polarisationsfilter (**Analysator**, analyzer). Der zu untersuchende Stoff wird zwischen den Polarisator und den zunächst um 90° gedrehten Analysator gebracht, so dass es zu einer Aufhellung des Gesichtsfeldes kommt. Durch Nachdrehen des Analysators um einen Winkel α wird wieder Dunkelheit erzeugt. Erfolgt die Drehung für den dem Lichtstrahl entgegen blickenden Beobachter im Uhrzeigersinn (der Drehwinkel α ist negativ), so nennt man die Substanz **rechtsdrehend** (right rotating oder dextrorotatory) und im anderen Fall **linksdrehend** (left rotating oder laevorotatory). Auf diese Weise lassen sich Drehungen der Polarisationssebene mit einer Genauigkeit von ca. $0,1^\circ$ messen. Drehungen der Polarisationssebene werden bei einigen Festkörpern beobachtet, bei Lösungen optisch aktiver Moleküle, bei Flüssigkristallen und bei beliebigen Stoffen, wenn man in Strahlrichtung ein Magnetfeld anlegt. Da sich eine linear polarisierte Welle in eine rechtszirkular und eine linkszirkular polarisierte Welle gleicher Amplitude zerlegen lässt, kann man die Drehung dadurch erklären, dass diese beiden Wellen unterschiedliche Geschwindigkeiten (c_R und c_L) besitzen. Führt man noch unter Verwendung der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 die Brechungsindizes $n_R = c_0/c_R$ und $n_L = c_0/c_L$ ein, so ergibt sich für den Winkel α , um den die Schwingungsebene nach Durchlaufen der Strecke ℓ gedreht ist,

$$\alpha = \frac{\pi \ell}{\lambda_0} (n_R - n_L), \quad (526)$$

wobei λ_0 die Vakuumwellenlänge des Lichtes darstellt.

Für die elektrische Feldstärke \vec{E}_R der sich entlang der z -Achse ausbreitenden rechtszirkular polarisierten Welle gilt (s.S.370) $\vec{E}_R(t, z) = \vec{e}_x \hat{E} \sin \omega t - (2\pi n_R/\lambda_0)z] + \vec{e}_y \hat{E} \cos \omega t - (2\pi n_R/\lambda_0)z]$ und analog für die linkszirkular polarisierte Welle $\vec{E}_L(t, z) = \vec{e}_x \hat{E} \sin \omega t - (2\pi n_L/\lambda_0)z] - \vec{e}_y \hat{E} \cos \omega t - (2\pi n_L/\lambda_0)z]$. Nach Durchlaufen der Strecke z ergibt sich also $\vec{E}(t, z) = \vec{E}_R(t, z) + \vec{E}_L(t, z)$. Unter Verwendung der Additionstheoreme $\sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin[(\beta + \gamma)/2] \cos[(\beta - \gamma)/2]$ und $\cos \beta - \cos \gamma = -2 \sin[(\beta + \gamma)/2] \sin[(\beta - \gamma)/2]$ folgt damit $\vec{E}(t, z) = 2\hat{E} \sin \omega t - \pi z(n_R + n_L)/\lambda_0 \{ \vec{e}_x \cos[\pi z(n_R - n_L)/\lambda_0] + \vec{e}_y \sin[\pi z(n_R - n_L)/\lambda_0] \}$. Für $z = 0$ ist die Amplitude demzufolge gleich $2\hat{E}_x$ und für $z = \lambda$ gleich $2\hat{E} \{ \vec{e}_x \cos[\pi \lambda(n_R - n_L)/\lambda_0] + \vec{e}_y \sin[\pi \lambda(n_R - n_L)/\lambda_0] \}$, so dass die Schwingungsebene um den Winkel $\alpha = \pi \lambda(n_R - n_L)/\lambda_0$ gedreht wurde (s.Abb.211).

Die experimentell gefundene Tatsache, dass die Differenz der Brechungsindizes $n_R - n_L$ von der Vakuumwellenlänge abhängt, bezeichnet man als **optische Rotationsdispersion** (optical rotary dispersion, abgekürzt mit ORD). Es ist üblich, an Stelle der Größe $n_R - n_L$ den Drehwinkel in **Grad** (degree, Symbol $^\circ$) pro durchstrahlter Schichtdicke ℓ anzugeben. Diese Größe (K_α) wird **Drehvermögen** (optical rotation) genannt. Nach Gl.(526) gilt unter Beachtung der Tatsache, dass 180° dem Winkel π rad entsprechen,

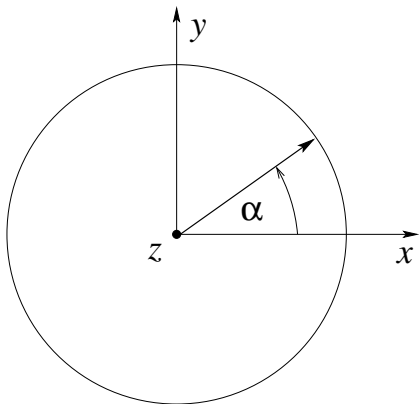


Abbildung 211. Eine linear polarisierte Welle, deren Schwingungsebene mit der $x - z$ -Ebene zusammenfällt, breitet sich in z -Richtung aus, d.h. auf den Beobachter zu. Nach Durchlaufen einer optisch aktiven Schicht mit der Dicke λ sei die Schwingungsebene um den Winkel α gedreht. Für $\alpha > 0$ ist der Stoff definitionsgemäß (s.S.386) linksdrehend und es gilt nach Gl.(526) $n_R > n_L$

$$K_\alpha = \frac{180^\circ}{\lambda_0} (n_R - n_L). \tag{527}$$

Einige Messwerte für **optisch aktive Festkörper** (optically active solids) zeigt die Tab.75. Dabei erfolgt die Drehung nur dann, wenn die Strahlrichtung mit der optischen Achse zusammenfällt. Bei Quarz existieren sowohl rechts- als auch linksdrehende Kristalle.

Tabelle 75. Das Drehvermögen K_α einiger optisch aktiver Festkörper bei 20 °C

		Vakuumwellenlänge $\lambda_0/ \text{ nm}$			
		486,1	589,3	686,7	780,8
Festkörper	Zinnober (HgS, cinnabar)				325
	Quarz (SiO ₂ , quartz)	32,8	21,7	15,7	12,7
	Natriumchlorat	4,67	3,13	2,27	
	(NaClO ₃ , sodium chlorate)				

Eine Drehung der Schwingungsebene zeigen auch *Flüssigkeiten* und *Lösungen*, sofern sie asymmetrische Moleküle enthalten. Die Asymmetrie muss aber derart beschaffen sein, dass von dem Molekül ein **Spiegelbildisomer** (optical isomer oder enantiomer) existiert, wie dies schematisch in der Abb.212 dargestellt ist. Das eine Isomer dreht die Schwingungsebene des Lichtes in der einen, das andere in der entgegengesetzten Richtung, jedoch um den gleichen Betrag. Beispiele sind der **Traubenzucker** (glucose, dextrose), der rechts dreht, und der linksdrehende **Fruchtzucker** (fructose oder laevulose). Beide Zucker besitzen die gleiche Summenformel C₆H₁₂O₆. Ein Gemisch rechts- und linksdrehender Isomere gleicher Konzentration nennt man **Racemat** (racemate); es bewirkt keine Drehung der Schwingungsebene.

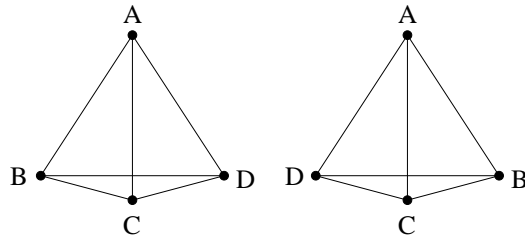


Abbildung 212. Spiegelbildisomere eines Moleküls bestehend aus den Bauteilen (Atome, Molekülgruppen) A, B, C und D in tetraedrischer Anordnung

Rohrzucker (saccharose, sucrose), der durch chemische Verbindung von Trauben- und Fruchtzucker unter Wasseraustritt entsteht ($C_{12}H_{22}O_{11}$), dreht die Schwingungsebene nach rechts. Der Drehwinkel von Lösungen ist proportional zur Konzentration der optisch aktiven Moleküle. Dies nutzt man aus, um z.B. bei zuckerkranken Personen die Konzentration des Zuckers (Traubenzucker) im Harn zu bestimmen. Besonders starke Drehungen der Schwingungsebene werden bei optisch anisotropen Flüssigkristallen beobachtet. **Flüssigkristalle** (liquid crystals) sind Flüssigkeiten, die aus langgestreckten Molekülen bestehen, die in gewissen Temperaturbereichen geordnet sind. Es gibt im Wesentlichen drei Typen, die man als **nematische** (nematic), **smektische** (smectic) und **cholesterische** (cholesteric) Flüssigkristalle bezeichnet.

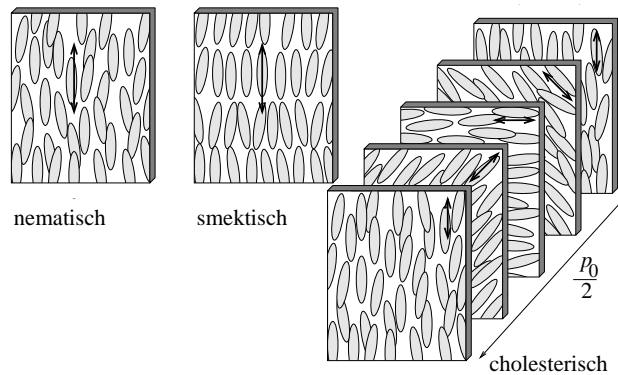


Abbildung 213. Molekülerorientierung in nematischen, smektischen und cholesterischen Flüssigkristallen, p_0 ist die Ganghöhe (pitch) des cholesterischen Flüssigkristalls

Wenn bei einem cholesterischen Flüssigkristall die Wellenlänge λ des Lichtes klein gegen das Produkt $p = p_0 \cdot |n_o - n_e|$ aus **Ganghöhe** p_0 (pitch) und Brechzahl-anisotropie $|n_o - n_e|$ ist, dann dreht sich die Schwingungsebene entsprechend der Schraubung (adiabatischer Fall). Für $\lambda \approx p$ wird diejenige zirkular polarisierte Welle, deren Drehsinn mit dem der Molekülordnung übereinstimmt, reflektiert. Wenn schließlich die Wellenlänge λ groß gegen p ist, kommt es wieder zu einer Drehung

der Schwingungsebene, jedoch hängen Drehsinn und Betrag der Drehung in komplizierter Weise von λ und p_0 sowie den Brechungsindizes für die ordentliche und die außerordentliche Welle ab, wobei die optische Achse durch die Schraubenrichtung gegeben ist [DEG74]. Cholesterische Flüssigkristalle besitzen Ganghöhen von ca. $0,2 \mu\text{m}$ bis ∞ . Bei $p = 3,6 \mu\text{m}$ gilt für sichtbares Licht $\lambda \ll p$ und es ergibt sich ein Drehwinkel von 10^5 Grad pro mm Schichtdicke (!).

Bei den heute weit verbreiteten **Flüssigkristallanzeigen** (liquid-crystal displays, abgekürzt mit LCD) befindet sich ein nematischer Kristall in einer $5 \mu\text{m}$ bis $15 \mu\text{m}$ dicken Schicht zwischen zwei Glasplättchen. Diese sind innen mit lichtdurchlässigen Elektroden überzogen, die so präpariert wurden, z.B. durch Einritzen von Furchen, dass sich die Moleküle in einer Vorzugsrichtung anlagern. Sind die beiden Vorzugsrichtungen um 90° gegeneinander verdreht, dann ordnen sich die Moleküle in der Schicht schraubenförmig, wie bei einem cholesterischen Flüssigkristall, an. Setzt man nun noch vor dieses Plättchenpaar eine Polarisationsfolie (Polarisator) und dahinter eine zweite aber um 90° gedrehte Polarisationsfolie (Analysator), so geht das Licht durch diese Zelle (**TN-Zelle**, twisted nematic cell) hindurch, da der Flüssigkristall die Schwingungsebene ja gerade um 90° dreht. Wenn man aber zwischen die beiden Elektroden eine geringe Spannung von ca. $1,5 \text{ V}$ bis 5 V anlegt, dann orientieren sich die Moleküle in Richtung des elektrischen Feldes, also senkrecht zu den Plättchen. Die Drehung der Schwingungsebene entfällt und die TN-Zelle wird lichtundurchlässig. Man kann aber auch - und dies ist meist der Fall - in Reflexion arbeiten, indem man unmittelbar hinter die Analysatorfolie einen Aluminiumspiegel setzt. Werden die Elektroden schließlich noch in einzelne geometrische Segmente mit getrennten Spannungszuführungen unterteilt, so lassen sich die bekannten dunklen Ziffernsymbole vor einem grauen Hintergrund (diffus von dem Aluminiumspiegel reflektiertes Licht) erzeugen. Der besondere Vorteil der LCD's ist der geringe Leistungsbedarf von nur etwa 5 mW/m^2 .

Bringt man eine isotrope Substanz, wie z.B. Glas oder Schwefelkohlenstoff, in eine stromdurchflossene Spule und schickt einen linear polarisierten Lichtstrahl hindurch, so wird die Schwingungsebene gedreht. Diese Erscheinung nennt man **Magnetorotation** (magnetorotation) oder **Faraday-Effekt** (Faraday effect, Michael Faraday 1791-1867). Der Drehwinkel α ist proportional zur Dicke ℓ der durchstrahlten Substanz und zur Komponente B_S der magnetischen Flussdichte in Strahlrichtung. Man schreibt

$$\alpha = K_V \ell B_S. \quad (528)$$

Die Größe K_V heißt **Verdet-Konstante** (Verdet constant, Marcel Emile Verdet 1824-1866). Sie ist eine von der Wellenlänge und der Temperatur abhängige Stoffkonstante (s.Tab.76). *Die Gl.(528) besagt, dass für $K_V > 0$ die Schwingungsebene die gleiche Schraubung erfährt wie der felderzeugende Strom.*

Tabelle 76. Verdet-Konstante K_V für einige Stoffe bei Zimmertemperatur und $\lambda_0 = 589,3$ nm

Stoff	K_V / (rad T ⁻¹ m ⁻¹)
Steinsalz (NaCl, sodium chloride)	10,8
Schwefelkohlenstoff (CS ₂ , carbon disulphide)	12,3
Wasser (H ₂ O, water)	3,8
Kohlendioxid (CO ₂ , carbon dioxide) bei 0,1MPa	0,0025

Wir betrachten einen linear polarisierten Lichtstrahl, der eine Spule in der positiven z -Richtung durchsetzt. Der felderzeugende Strom soll mit der Strahlrichtung eine Rechtsschraube bilden, so dass nach der Korkenzieherregel (s.S.199) B_S größer als null ist. Damit ergibt sich aus Gl.(528) $\alpha > 0$, was nach der Festlegung von S.386 einer Linksdrehung der Schwingungsebene entspricht (s.Abb.211, S.388).

Bei diamagnetischen Stoffen lässt sich die Drehung klassisch auf die Beeinflussung der Elektronenbewegung durch das magnetische Feld zurückführen. Es ergibt sich für die Verdet-Konstante eine Proportionalität zur negativen Ableitung der Brechzahl nach der Vakuumwellenlänge (s.Gl.(531), S.394). Im Spektralbereich normaler Dispersion, d.h. wenn $dn/d\lambda_0 < 0$ gilt (s.S.312), folgt damit $K_V > 0$. Für paramagnetische oder ferromagnetische Stoffe, d.h. Substanzen mit ungepaarten Elektronen, wie z.B. Salze von Übergangsmetallionen sowie ihre Lösungen, ist die Verdet-Konstante meist negativ. Die Tatsache, dass beim Faraday-Effekt, im Gegensatz zu den bisher behandelten Drehungen der Polarisationssebene, der Drehwinkel sein Vorzeichen ändert, wenn man die Strahlrichtung umkehrt (B_S in Gl.(528) wird zu $-B_S$), hat interessante Konsequenzen, auf die im nächsten Abschnitt näher eingegangen wird.

23.5.2 Nichtreziproke Bauelemente

Ein ideales **nichtreziprokes Bauelement** (nonreciprocal unit) überträgt einen Energiestrom in der einen Richtung ungeschwächt, in der anderen jedoch gar nicht. Das bekannteste Beispiel aus der Mechanik ist das Ventil (valve), das einen Massenstrom nur in einer Richtung passieren lässt. Ein **optisches Ventil** (optical valve) kann man unter Verwendung des Faraday-Effektes durch folgende Anordnung realisieren: Die magnetische Flussdichte B_S der Feldspule und die Dicke ℓ der durchstrahlten Substanz werden so gewählt, dass der Drehwinkel α (s.Gl.(528)) für die beiden Strahlrichtungen $\pi/4$ bzw. $-\pi/4$ beträgt. Links und rechts von der Feldspule werden außerdem Polarisationsfilter angebracht, deren Durchlassrichtungen gegeneinander um den Winkel $\pi/4$ verdreht sind. Auf diese Weise wird unpolarisiertes Licht, wenn es von der einen Richtung kommt, als linear polarisiertes Licht hindurch gelassen, in der anderen Richtung jedoch gesperrt. Praktische Anwendung findet dieses Prinzip in der Mikrowellentechnik beim **Richtungsleiter** (isolator). Da in Hohlleitern

(s.S.285) mit rechteckigem Querschnitt die elektromagnetische Welle ohnehin linear polarisiert ist, entfallen die Polarisationsfilter; die Hohlleiter müssen lediglich um $\pi/4$ gegeneinander verdreht werden (s.Abb.214). Als drehende Substanz wird meist ein Ferrit (s.S.225) benutzt.

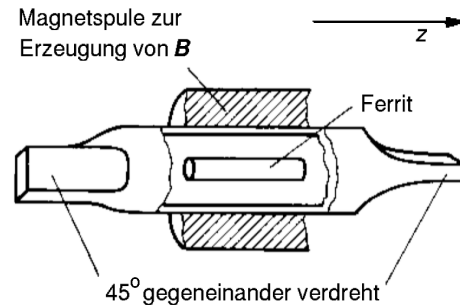


Abbildung 214. Verwendung des Faraday-Effektes beim Richtungsleiter in der Mikrowellentechnik

Richtungsleiter werden in der Mikrowellentechnik häufig eingesetzt, und zwar dann, wenn man an einen Verbraucher, unabhängig von dessen innerem Widerstand, die vom Sender maximal abgebbare Leistung übertragen will: Durch Zwischenschaltung eines Richtungsleiters wird die reflektierte Welle und damit der Rückfluss von Energie unterbunden.

Ein elektrisches oder elektronisches Bauelement, das zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen besitzt, wie z.B. ein Transformator, nennt man einen **Vierpol** (four-terminal network). Unter einem **Gyrator** (gyrator) versteht man einen Vierpol, bei dem eine Wechselspannung in der einen Richtung mit der Phasenverschiebung null und in der anderen (Eingangs- und Ausgangsklemmen sind vertauscht) mit der Phasenverschiebung π übertragen wird (nichtreziproker Phasenschieber). Ein Gyrator lässt sich z.B. mit Hilfe des Hall-Effektes (s.S.213) realisieren, indem man die beiden Elektroden, die beim Hall-Effekt zur Stromzuführung dienen, als Ausgangsklemmen und die beiden Hall-Elektroden als Eingangsklemmen verwendet. Durch Anschalten von zwei zusätzlichen, geeignet dimensionierten Ohm'schen Widerständen zwischen je eine Hall- und eine Stromelektrode erhält man einen Vierpol, der als **elektronisches Ventil** (electronic valve) wirkt. Andere Beispiele für elektronische Ventile sind vor allem die im Abschn.27.4 (S.496) näher beschriebenen Transistoren.

23.5.3 Klassische Interpretation der Verdet-Konstante und des Zeeman-Effektes

Beim klassischen Atommodell umkreisen die Elektronen der Atomhülle den wegen seiner viel größeren Masse raumfesten Atomkern. Bezeichnen wir mit m_e bzw. $-e$ die Ruhemasse bzw. die Ladung eines Elektrons und mit $+Ze$ die Ladung des Atomkerns, so ergibt sich für die Kreisfrequenz des Elektronenumlaufs auf einer Kreisbahn mit dem Radius r

$$\omega_0 = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3} \right)^{1/2}. \quad (529)$$

Für die Zentripetalkraft, die bei der Kreisbewegung des Elektrons wirken muss, gilt unter der Voraussetzung $r\omega_0 \ll c_0$, d.h. bei nichtrelativistischen Umlaufgeschwindigkeiten, $m_e\omega r$ (s.Gl.(58), S.37). Gleichsetzen mit der elektrostatischen Anziehungskraft $Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ (s.Gl.(261), S.167) liefert die gesuchte Gl.(529).

Aus der Lenz'schen Regel (s.S.208) folgt nun, dass sich bei Anlegen eines magnetischen Feldes mit der Flussdichte \vec{B} in Richtung des Vektors $\vec{\omega}_0$ die Umlauffrequenz erhöhen muss (auf $\omega > \omega_0$). Unter Verwendung der Formel für die Lorentz-Kraft (s.Gl.(329), S.212) findet man leicht $\omega = \omega_0 + eB/(2m_e)$

Bei Anwesenheit der magnetischen Flussdichte B kommt zu der elektrostatischen Anziehungskraft $Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ noch die Lorentz-Kraft $\omega r e B$ (s.Gl.(329), S.212, mit $v = r\omega$) hinzu. Gleichsetzen der Summe dieser beiden Kräfte mit der Zentripetalkraft $m_e\omega^2 r$ liefert die Beziehung $Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r^2) + \omega r e B = m_e\omega^2 r$. Ersetzen wir den 1. Term links mit Hilfe von Gl.(529) durch $m_e\omega_0^2 r$, so folgt $\omega e B = m_e(\omega^2 - \omega_0^2)$. Mit $(\omega^2 - \omega_0^2) = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)$ und unter der Voraussetzung $\omega - \omega_0 \ll \omega_0$ ergibt sich $\omega = \omega_0 + eB/(2m_e)$.

Bei einer beliebigen Orientierung von \vec{B} liefert eine analoge, aber etwas längere Rechnung die Aussage, dass der Elektronenumlauf des Elektrons durch eine Kreisfrequenz $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_{\text{LF}}$ beschrieben werden kann mit

$$\vec{\omega}_{\text{LF}} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}. \quad (530)$$

$\vec{\omega}_{\text{LF}}$ heißt **Larmor-Frequenz** (Larmor frequency, Joseph Larmor 1857-1942) und die damit verbundene Bewegung **Larmor-Präzession** (Larmor precession).

Nach dem klassischen Atommodell führt also die gesamte Elektronenhülle eines Atoms unter der Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes eine zusätzliche Rotation mit der Larmor-Frequenz ω_{LF} um die Richtung des Magnetfeldes aus.

Dies ist die Ursache des auf S.218 beschriebenen Diamagnetismus.

Zur Berechnung der Verdet-Konstanten betrachten wir einen linear polarisierten Lichtstrahl, dessen Richtung mit der des Magnetfeldes übereinstimmt und dessen Kreisfrequenz ω sei. Dann zerlegen wir dieses Licht in eine rechtszirkular und eine linkszirkular polarisierte Welle gleicher Amplitude. Außerdem wollen wir voraussetzen, dass der durchstrahlte Stoff isotrop sei, so dass für $B_S = 0$ die Lichtgeschwindigkeiten der beiden Wellen übereinstimmen und gleich c_0/n sind. c_0 bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n den Brechungsindex für die Kreisfrequenz ω . Wie auf S.313ff. gezeigt wurde, ergibt sich die Verringerung der Lichtgeschwindigkeit, die durch den Brechungsindex n beschrieben wird, aus der Wechselwirkung der elektromagnetischen Welle mit den Atomhüllen des durchstrahlten Stoffes. Da unter dem Einfluss des Magnetfeldes die Atomhüllen aber mit der Larmorfrequenz ω_{LF} um die Richtung von \vec{B} und damit in unserem Fall um die Strahlrichtung rotieren, wirkt der rechtszirkular polarisierte Strahl (s.S.370) mit der Kreisfrequenz $\omega + \omega_{LF}$ und der linkszirkular polarisierte Strahl mit der Kreisfrequenz $\omega - \omega_{LF}$ auf die Atomhüllen. Infolge der Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex ergibt sich ein Unterschied in den beiden Lichtgeschwindigkeiten und damit eine Drehung der Schwingungsebene. Auf diese Weise erhält man für die Verdet-Konstante die Beziehung

$$K_V = -\frac{e\lambda_0}{2m_e c_0} \frac{dn}{d\lambda_0}. \quad (531)$$

Für den Brechungsindex n_R der rechtszirkular polarisierten Welle gilt $n + (dn/d\omega)\omega_{LF}$, wobei n den Brechungsindex für die Kreisfrequenz ω bezeichnet. Analog folgt für die linkszirkular polarisierte Welle $n_L = n - (dn/d\omega)\omega_{LF}$. Der Drehwinkel α ergibt sich durch Anwendung der Gl.(526), S.387, zu $\alpha = (\pi\lambda/\lambda_0)2 \cdot (dn/d\omega)\omega_{LF}$. Ersetzt man hier noch ω_{LF} durch Gl.(530), S.393, und beachtet, dass wegen $\omega = 2\pi c_0/\lambda_0$ die Beziehung $d\omega = -2\pi c_0 \lambda_0^{-2} d\lambda_0$ gilt, so folgt $\alpha = -\lambda B_S e \lambda_0 / (2m_e c_0) dn/d\lambda_0$. Ein Vergleich mit Gl.(528), S.390 liefert die Gl.(531).

Zum Vergleich der hier klassisch abgeleiteten Formel für die Verdet-Konstante mit experimentellen Werten betrachten wir als Beispiel Wasser. Die mittlere Dispersion $(n_F - n_C)$ des Wassers beträgt bei Zimmertemperatur 0,0060 (s.Tab.71, S.358). Mit $\lambda_F - \lambda_C = -170,2$ nm (s.Tab.66, S.312) ergibt sich für $dn/d\lambda_0$ ein Wert von ca. -35250 m $^{-1}$. Damit folgt aus Gl.(531) und mit den bekannten Werten für die Naturkonstanten (s.A.1, S.1245) $K_V \approx 5,9$. Experimentell findet man für die etwas größere Wellenlänge von 589 nm (s.Tab.76, S.391) $K_V \approx 3,8$, so dass die Gl.(531) zumindest die richtige Größenordnung liefert.

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) sagte 1895 auf Grund der im Folgenden beschriebenen Überlegungen eine Aufspaltung und Polarisierung der Spektrallinien voraus, wenn sich die strahlenden Atome in einem äußeren Magnetfeld befinden. Sein Mitarbeiter Pieter Zeeman (1865-1943) bestätigte ein Jahr später experimentell diese Erscheinung, die man seitdem als **Zeeman-Effekt** (Zeeman effect) bezeichnet.

Im klassischen Modell wird die Emission von Licht durch eine lineare harmonische Schwingung der negativ geladenen Elektronenhülle gegenüber dem positiv geladenen Atomkern, d.h. durch einen Hertz'schen Dipol (s.S.281) beschrieben. Das Dipolmoment, dessen Kreisfrequenz ω_0 sei, zerlegen wir bei Anwesenheit eines Magnetfeldes in eine Komponente parallel (π -Komponente) und eine Komponente senkrecht (σ -Komponente) zum Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} . Die σ -Komponente wird dann noch in zwei zirkular polarisierte Komponenten zerlegt, so dass die eine die Richtung von \vec{B} mit $+\omega_0$ und die andere mit $-\omega_0$ umkreist. Infolge der Larmor-Präzession (s.S.393), die eine zusätzliche Rotation der Elektronenhülle um die Richtung von \vec{B} mit der Kreisfrequenz $\omega_{\text{LF}} = eB/(2m_e)$ (s.Gl.(530), S.393) darstellt, werden die beiden Kreisfrequenzen zu $\omega_0 + \omega_{\text{LF}}$ und $-\omega_0 + \omega_{\text{LF}}$. Die π -Komponente dagegen wird durch das Magnetfeld nicht beeinflusst (s.Abb.215).

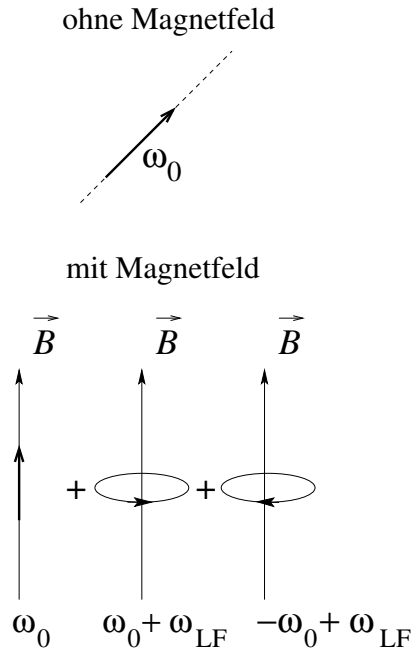


Abbildung 215. Ohne Magnetfeld führt die Elektronenhülle bei der Lichtemission eine lineare harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 gegenüber dem Atomkern aus (Hertz'scher Dipol). Unter dem Einfluss eines Magnetfeldes mit der Flussdichte \vec{B} lässt sich die resultierende Bewegung beschreiben durch (1) eine lineare harmonische Schwingung (ω_0) in Richtung von \vec{B} (π -Komponente des Dipolmoments) und (2) zwei zirkular polarisierte Schwingungen, deren Umlauf in der Ebene senkrecht zu \vec{B} erfolgt (σ -Komponenten des Dipolmoments) und deren Kreisfrequenzen $\omega_0 + \omega_{\text{LF}}$ bzw. $-\omega_0 + \omega_{\text{LF}}$ sind

Daraus ergibt sich folgender experimenteller Befund: Ohne Magnetfeld beobachtet man *eine* Spektrallinie (**Singulett**, singlet) mit der Frequenz ω_0 . Diese Linie ist unpolarisiert, da die Schwingungsrichtungen der Atomhüllen statistisch verteilt sind. Unter dem Einfluss eines Magnetfeldes spaltet das Singulett bei Beobachtung in Richtung des Magnetfeldes (**longitudinaler Zeeman-Effekt**, longitudinal Zeeman effect) in ein Linienpaar (**Doublett**, doublet) auf. Die beiden Linien sind linkszirkular

$(\omega_0 + \omega_{\text{LF}})$ bzw. rechtszirkular $(\omega_0 - \omega_{\text{LF}})$ polarisiert, wenn man dem Magnetfeld entgegenschaut. Von der π -Komponente kommt keine Strahlung, da der Hertz'sche Dipol ja nicht in Schwingungsrichtung strahlt (s.S.287 unten). Bei Beobachtung senkrecht zum Magnetfeld (**transversaler Zeeman-Effekt**, transverse Zeeman effect) erhält man eine Zentrallinie bei ω_0 und zwei Satellitenlinien bei $\omega_0 \pm \omega_{\text{LF}}$ (**Triplet**, triplet). Die Satellitenlinien besitzen je die halbe Intensität der Zentrallinie. Alle drei Linien sind linear polarisiert. Bei der Zentrallinie liegt die Schwingungsebene parallel zum Magnetfeld, bei den Satellitenlinien steht sie senkrecht dazu (s.Abb.215). Beobachtet man die hier beschriebenen Erscheinungen, so spricht man vom **normalen Zeeman-Effekt** (normal Zeeman effect). Voraussetzung dafür ist, dass sich die Eigendrehimpulse (Spins) der Elektronen in der Elektronenhülle wechselseitig kompensieren, d.h. dass sie jeweils antiparallel stehen. Wenn dies nicht zutrifft, treten i.Allg. mehr als drei Linien auf, deren Abstände auch nicht gleich der Larmorfrequenz, sondern ein rationales Vielfaches davon sind (**anomaler Zeeman-Effekt**, anomalous Zeeman effect).

Physikalisches Praktikum

Schenk, W.; Kremer, F.; Beddies, G.; Franke, Th.;

Galvosas, P.; Rieger, P. - Schenk, W.; Kremer, F. (Hrsg.)

2014, XIV, 397 S. 325 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-00665-5